Előzetes megjegyzés. Az I–III. megoldások – egymásra részben támaszkodva – egyre kisebb n értékeket adnak meg, viszont egyre erősebb meggondolások igénybevételével.

I. megoldás. Minden $n > 1000$ esetén $1/n$-ben a tizedes vessző után legalább három zérus következik, és ha n nem osztható sem 2-vel, sem 5-tel akkor ezek a számjegyek – mint ismeretes[1] – hozzátartoznak a szakaszhoz.
A legkisebb ilyen érték $n = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, és erre valóban $1/1001 = = 0,\ 000\ 999\ 000\ 9\dots$, kétféle, három jegyből álló egymásutánnal is teljesíti a követelményt.

Korányi László (Budapest, Móricz Zs. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy a kívánt tulajdonsága nem lehet meg kétjegyű számnak, éspedig azzal, hogy nyomon követjük az $1 : n$ osztás kérdéses részében az egymás utáni maradékok alakulását. Legyen $1/n$ kifejtésében valahol három egymás utáni tizedes számjegy j, az első j-t megelőző osztási lépés maradéka r_1, és az ez után következő maradékok rendre r_2, r_3, r_4, természetesen mindegyikük 1 és $n-1$ közé eső szám, e korlátokat is megengedve. Ekkor az osztás próbája szerint

$$10\, r_1 = jn + r_2, \tag{1}$$

ahol $r_2 \neq r_1$, különben ugyanis innen kezdve $1/n$ minden jegye j lenne, amit kizártunk. Eszerint

$$r_2 = r_1 + d,$$

ahol d egész szám és $|d| \geq 1$. Továbbá hasonlóan

$$r_3 = 10 r_2 - jn = 10\,(r_1 + d) - jn = r_2 + 10d = r_1 + 11d,$$
$$r_4 = 10 r_3 - jn = 10\,(r_1 + 11d) - jn = r_2 + 110d = r_1 + 111d,$$

tehát

$$|r_4 - r_1| = |111\, d| \geq 111.$$

Ámde 0 és n között bármelyik két szóba jövő maradék különbsége legföljebb $n-2$, ennélfogva a feladat követelményeit teljesítő n-re $n \geq 113$.

Ezek alapján 100 és 1000 között olyan n-et keresünk, amelyre a három megegyező j számjegy *közvetlenül a tizedes vessző utáni két zérus jegy* után következik:

$$1/n = 0,\ 0\,0\ j\ j\ j\ m\ \dots$$

ahol m egy esetleg más számjegy. Ez az alak csak a hatodik tizedesjegytől kezdve tér el $0,\ 0\,0\ j\ j\ j\ j\ \dots$-től, amelynek minden további jegye is j. Ez az alak, mint ismeretes, $j = 1$ esetén $N = 900$ reciproka, $j = 2$ és 3 esetén $N = 450$, ill. 300 reciproka, kézenfekvő tehát n-et az ezen N értékekkel szomszédos számok között keresnünk.

$n = 299$ nem felel meg, mert 1/299-ben az első $j = 3$-as jegy előtti maradék $r_1 = 100$, ezt $r_2 = 103$ követi, tehát a fenti d értéke 3, így pedig $r_4 = r_1 + 111d = 433 > 299$. Nem felel meg a szigorított követelménynek $n \leq 298$ sem.

$n = 301$ mellett hasonlóan $d = -3$ és $r_4 < 0$, tehát ez sem felel meg; viszont teljesül a követelmény $n = 449$ esetében: $r_1 = 100$, $d = 2$, $r_4 = 322 < 449$, $1/449 = 0{,}002\ 227\ 1\ \dots$ és a szakasz itt is közvetlenül a tizedesvessző után kezdődik. A szakasz egyező számjegyei helyének fenti pótkövetelménye mellett ez a legkisebb megoldása kérdésünknek.

Hasonlóan megfelel a 900-at megelőző számok közül 899, 898, 897, 895, 894 és 893 is, de a párosak és 895 esetében ezt csak egy, a vegyes szakaszos tizedes törtekre érvényes tétel alapján lehet bizonyítani.

Szeredi János (Budapest, II. Rákóczi F. Gimn., III. o. t.)

III. megoldás. Tűzzük ki célul egy, a 200-nál kisebb n keresését. Ekkor a fenti $|r_4 - r_1| = |111d|$ csak $|d| = 1$ mellett teljesülhet. Írjuk (1)-et így:

$$10 r_1 = jn + r_1 + d, \qquad 9r_1 - d = 9r_1 \mp 1 = jn. \tag{2}$$

Eszerint j nem lehet 0, 3, 6 és 9, mert a bal oldal nem osztható 3-mal. Továbbá (2)-ből

$$r_1 = \frac{jn + d}{9}, \quad \text{ill.} \tag{3}$$
$$n = \frac{9r_1 - d}{j}. \tag{4}$$

Mármost $d = +1$ esetén $0 < r_4 < n$ alapján

$$0 < r_4 = r_1 + 111 = \frac{jn+1}{9} + 111 = \frac{jn + 1000}{9} < n,$$
$$1000 < (9-j)n < 200(9-j), \qquad\qquad j < 4,$$

[1] Ha a és b természetes számok, és b relatív prím a 10-hez képest, akkor az a/b hányados végtelen tizedestört kifejtésében a szakasz közvetlenül a tizedesvessző után kezdődik. Lásd pl. *H. Radernaeher–O. Toeplitz:* Számokról és alakzatokról, Középiskolai Szakköri Füzetek, 2. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954, 135–140. oldal.

tehát csak $j=1$ és 2 jön szóba. Másrészt hasonlóan n-et kiküszöbölve

$$0 < r_4 = r_1 + 111 < \frac{9r_1 - 1}{j}, \quad r_1 > \frac{111j+1}{9-j}.$$

A lehetségesnek maradt $j=1$ és $j=2$ jegyek mellett innen $r_1 \geq 15$, ill. $r_1 \geq 32$ adódik.

Ezek az r_1 értékek és a hozzájuk (4)-ből adódó n-ek a következők:

$$\begin{aligned} j=1 \text{ céljára } r_1 &= 15, \quad 16, \quad 17, \quad 18, \ \ldots, \quad 22, \\ n &= 134,\ 143,\ 152,\ 161,\ \ldots,\ 197; \end{aligned} \tag{5}$$

$j=2$ céljára (4) alapján csak a páratlan r_1 értékek adnak egész n-et:

$$\begin{aligned} r_1 &= 33, \quad 35, \quad 37, \ \ldots, \quad 43, \\ n &= 148,\ 157,\ 166,\ \ldots,\ 193. \end{aligned} \tag{6}$$

Eddigi eredményünk az, hogy a választott 200-as korlát alatt csak az (5) és (6) számok reciproka felelhet meg a feladat követelményének, de esetenkénti próbával kell eldönteni, melyik számok felelnek meg valóban. Eleve nem fér össze olyan n, r_1 értékpár, amelyben n páros és r_1 páratlan, hiszen páros n-nel osztva 10 r_1-et, a maradék páros, nem térhet vissza r_1 akárhány osztási lépés után sem.

A talált n-ek legkisebbike: 143 nem felel meg, mert $1:143$-ban csak 6 különböző maradék lép fel: 1, 10, 100, 142, 133, 43, és köztük nem szerepel az $r_1=16$. $n=157$ és $n=161$ viszont megfelelnek, erről az utóbbiban gyorsabban győződünk meg: $1:161=0{,}0062\,111\,801\ldots$, az előbbiben a 35–37. sorszámú tizedesjegyek 2-esek.

Lényegében ugyanezzel a gondolatmenettel $d=-1$ esetére

$$0 < r_4 = r_1 - 111 < n$$

alapján $r_1 > 111$, másrészt (3) alapján r_1 et kiküszöbölve

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{jn-1}{9} - 111 = \frac{jn-1000}{9}, \\ j &> \frac{1000}{n} > \frac{1000}{200} = 5, \end{aligned}$$

tehát így ismétlődő számjegyként csak $j=7$ és 8 jöhet szóba. (4) alapján és $j=8$ esetén a következő r_1, n párokat kapjuk:

$$\begin{aligned} r_1 &= 119,\ 127,\ 135,\ 143,\ \ldots,\ 175, \\ n &= 134,\ 143,\ 152,\ 161,\ \ldots,\ 197. \end{aligned}$$

$j=7$ esetén pedig

$$\begin{aligned} r_1 &= 115,\ 122,\ 129,\ 136,\ \ldots,\ 160, \\ n &= 148,\ 157,\ 166,\ 175,\ \ldots,\ 193. \end{aligned}$$

Észrevesszük, hogy ugyanazokat az n-eket kaptuk, mint $d=+1$ esetén. Valóban, a fenti osztásokat folytatva $1:161$-ben a 38–40. számjegyek 8-asok és $1:157$-ben a 74–76. jegyek 7-esek.

Eljárásunk azt is bizonyítja, hogy 157-nél kisebb szám nem felel meg a feladat követelményének. Azt is láttuk, hogy 157, 161 és 1001 reciprokának tizedestört kifejtésében legalább kétszer–kétszer fordul elő egymás után 3 egyező számjegy.

Földes Tamás (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Arra az érdekességre, hogy $n=157$ (prímszám) mellett két számjegyhármas adódott, a következő tétel ad magyarázatot. Ha p prímszám és $1:p$ szakaszának hossza (a szakasz számjegyeinek száma) páros szám: $2h$, akkor a kifejtésben egymástól h távolságra levő két számjegy összege[2] 9, éspedig azért, mert két egymástól h lépésnyi különbséggel fellépő maradék összege p.

Ez a tulajdonság $n=1001$ és 161 esetében is megmutatkozik, bár ezek nem prímek.

Másrészt $1:449$ kifejtésében (449 ismét prím) 16 tizedesjegy kiszámítása után a maradék $448=n-1$, ez a most idézett tétel megfordításával azt sejteti, hogy a szakasz hossza páros szám és meglesz a talált $\ldots 222 \ldots$ egymásután párja $\ldots 777 \ldots$ alakban; valóban, ezek a jegyek állnak a 19–21. helyeken.

[2] Lásd a fentebb idézett mű 148. oldalán.