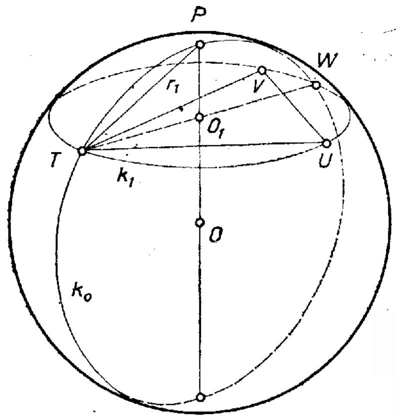
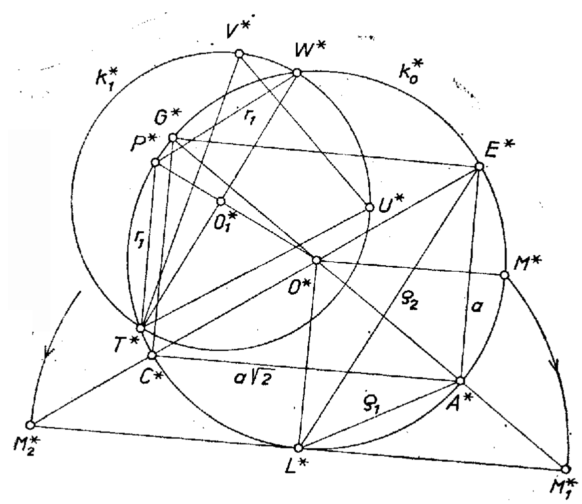
I. megoldás. *α)* Először a g gömb egy k_0 főkörével egybevágó (egyenlő sugarú) kört szerkesztünk egy S síkon. Ez önmagában is érdekes feladat. A főkört ismerve könnyű lesz megszerkeszteni majd a kocka élének hosszát, ebből pedig bármelyik két csúcsának távolságát. g-re egy tetszőleges P pontjába szúrt körzővel és alkalmasan választott r_1 körzőnyílással k_1 kört írunk (1. ábra).



1. ábra

Körzőnk valóban kört ír g-re, mert ha a k_1 vonalnak egy T pontján kívül további pontja is van, akkor minden más pontja úgy származtatható T-ből, hogy a TOP háromszöget – ahol O a g középpontja – forgatjuk PO mint tengely körül, hiszen így TO mint gömbsugár és TP mint körzőnyílás nem változnak. T abban a síkban mozog, amely átmegy PO-n levő O_1 merőleges vetületén és merőleges PO-ra, és TO_1 is állandó, mint a forgatott háromszög magassága, ez a k_1 (valódi) sugara. [1]

Legyen k_1 nek két további pontja U és V. Szerkesszük meg S-en a körzőnyílásba vett TU, UV, VT szakaszokból a $T^*U^*V^*$ háromszöget és ennek k_1 körülírt körét, [2] ezek egybevágók a TUV háromszöggel, ill. k_1 gyel (2. ábra) (!).



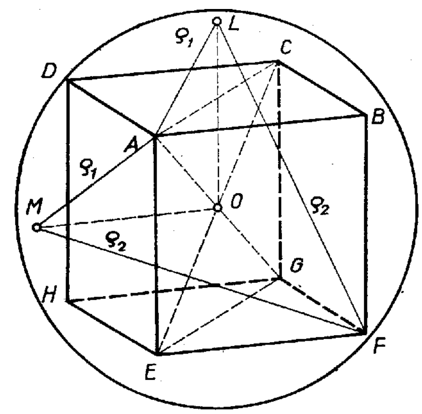
2. ábra

Jelöljük ki k_1^*-nak T^*-gal átellenes W^* pontját, szerkesszük meg a T^*W^* átmérő mint alap egyik oldalán $PT = r_1$ szárral a $P^*T^*W^*$ egyenlő szárú háromszöget, végül ennek k_0^* körülírt körét, ez a gömbünk (P, T pontjain átmenő) k_0 főkörének S-beli megfelelője (!).

β) Legyen egy a g-be beírt K kocka egyik lapja $ABCD$, erre merőleges élei rendre AE, BF, CG, DH (3. ábra).

[1] További állításaink bizonyítását helyszűke miatt az olvasóra hagyjuk; a kihagyott bizonyítások eredeti helyét így jelöltük meg: (!).

[2] A g bármely elemének S-beli megfelelőjét úgy jelöljük, mint magát az elemet, de megkülönböztetésül *-ot írunk melléje.



3. ábra

Ekkor K középpontja O-ban van és az $AEGC$ átlós síkmetszet körülírt köre egybevágó k_0^*-gal (!). Ezek alapján az $AE=a$ él és az $AC=a\sqrt{2}$ lapbeli átló hosszát az alábbi lépésekben kapjuk: k_0^*-hoz egy L^* pontjában érintőt szerkesztünk, kijelöljük az O^*L^*-ra merőleges átmérő egyik végpontját, M^*-ot, ezt L^* körül ráforgatjuk az érintőre az M_1^*, M_2^* pontokba, végül az $M_1^*O^*$, $M_2^*O^*$ egyenesekkel metsszük k_0^*-ot az A^*, G^*, ill. C^*, E^* pontokban (2. ábra). Ekkor az $A^*E^*G^*C^*$ téglalap két oldala a és $a\sqrt{2}$(!).

γ) Mármost K csúcsait egy a g-n tetszés szerint választott A-ból kiindulva az alábbi 1–6. körök felrajzolása útján jelölhetjük ki, mint $2-2$ kör metszéspontját. A leírás során a g felületére az X pontjába beszúrt, y nyílású körzővel rajzolt kört röviden $X(y)$-nal jelöljük. Köreinket a 3. ábrára nem rajzoltuk fel, mert ez síkjaik különböző állása miatt nem lenne szemléletes, viszont mindegyik körhöz felírjuk a rajtuk várt, a további körök által kimetszendő csúcspontokat.

1. Az $A(a)$ kör tetszőlegesen választott pontja B. E körön lesz rajta még a D és E csúcs.
2. A $B(a)$ körön lesz C és F (továbbá átmegy A-n).
3. Az $A(a\sqrt{2})$ kör kimetszi C-t és F-et, rajta lesz még H.
4. $B(a\sqrt{2})$ kimetszi D-t és E-t, rajta lesz még G.
5. $C(a\sqrt{2})$ kimetszi H-t (átmegy A-n és F-en).
6. $D(a\sqrt{2})$ kimetszi a még hátra levő G-t (!).

Ezzel a feladat megoldását befejeztük.

II. megoldás a *gömbi főkör közvetlen megszerkesztésére.* Legyen g felületének két különböző pontja P és Q. A PQ gömbi húr felező merőleges síkja g-ből főkört metsz ki, ebből 3 pontot megad a $P(c)$ és $Q(c)$ körök $(c \geq PQ)$ T és U metszéspontja és a $P(d)$, $Q(d)$ körök $(d > c)$ egyik, V metszéspontja. Lemásolva S-re a TUV háromszöget, ennek körülírt köre a főkörrel egybevágó.

Megjegyzések. 1. Olyan – a valóságban is használatos – körzőre gondoltunk, melynek száraiban is van egy-egy csukló (bár korlátozott forgatási lehetőséggel). Ilyennel a leszúrt tűhegytől távolabbi félgömbön is megrajzolhatjuk köreinket.

2. A körök fenti leírásából – néhol kiegészítéssel – látható, hogy bármelyik két metszésbe hozott körünknek két különböző közös pontja van, tehát metszésük rajzi szempontból is meg van határozva.

3. Bemutatunk röviden 2 más utat is a kocka csúcsainak kijelölésére. Megválasztjuk A-t, majd az $A(a\sqrt{2})$ körön C-t, ennek és a $C(a\sqrt{2})$ körnek két metszéspontja F és H (ekkor $ACFH$ egy a g-be beírt szabályos tetraéder). A hátra levő 4 csúcsot az $A(a)$, $C(a)$ és $F(a)$ körök páronkénti közös pontjai adják. Itt csak 5 kört használtunk fel.

Nevezzük az $ABCD$ lapra merőleges gömbi átmérő végpontjait e lap (és a vele párhuzamos kockalap) pólusainak. A 2. ábra szerint egy kockalap csúcsainak a két pólustól való távolsága $L^*A^*=\varrho_1$ és $L^*G^*=\varrho_2$, másrészt gömbi főkört L^*M^* körzőnyílással rajzolhatunk. Ezeket felhasználva megválaszthatjuk L-et, majd az $L(L^*M^*)$ körön M-et mint az $ABCD$, ill. $ADHE$ lap egyik-egyik pólusát, így K csúcsait az $L(\varrho_1)$, $L(\varrho_2)$, $M(\varrho_1)$, $M(\varrho_2)$ körök metszéspontjai adják (itt is 5 kört rajzoltunk).

Természetesen kombinálhatunk is a, $a\sqrt{2}$, ϱ_1 és ϱ_2 körzőnyílású köröket.