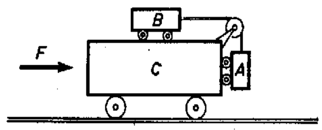
1. *Az 1. ábrán látható mechanikai rendszer három kocsiból áll, melyek tömege rendre* $m_A = 0{,}3$ kg, $m_B = 0{,}2$ kg *és* $m_C = 1{,}5$ kg.

a) *A C kocsira olyan nagy F erő hat vízszintesen, hogy az A és B kocsik C-hez viszonyítva nyugalomban maradnak. Kiszámítandó az A és B kocsik közötti fonálban fellépő kötélerő és meghatározandó az F erő.*

b) *Tegyük fel, hogy a C kocsi nyugalomban van. Meghatározandó az A és B kocsi gyorsulása és a közöttük levő fonálban fellépő fonálerő.*

Elhanyagolandók az összes súrlódási és közegellenállási erők, a fonál tömege, a csigák és a kocsikerekek tehetetlenségi nyomatéka.



1. ábra

Megoldás

a) Az A kocsi függőleges irányban nem gyorsul, ezért a kötelét $m_A g$ erővel húzza. Ugyanez az erő húzza B-t is, amelynek gyorsulása $a_B = m_A g/m_B$, Ugyanekkora a három kocsiból álló rendszer gyorsulása is, tehát az F erő:

$$F = (m_A + m_B + m_C) \cdot \frac{m_A}{m_B} \cdot g.$$

Számadatainkkal $a_B = a_C = 1{,}5g = 14{,}7\ \mathrm{m/s^2}$, a fonálerő 2,94 newton = 0,3 kp, F = 29,4 newton = 3 kp.

b) $m_A g$ gyorsító erő $m_A + m_B$ tömeget gyorsít, ezért a gyorsulás:

$$\frac{m_A}{m_A + m_B} \cdot g = 0{,}6g = 5{,}88\ \mathrm{m/s^2},$$

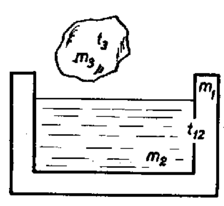
a fonálerő a súly és a gyorsító erő különbsége:

$$m_A g - m_A \cdot \frac{m_A}{m_A + m_B} \cdot g = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \cdot g = 0{,}12\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{g} = 1{,}176\ \mathrm{newton} = 0{,}12\ \mathrm{kp}.$$

Horváthy Péter

2. m_1 *tömegű rézkaloriméterben* m_2 *tömegű víz van, közös hőmérsékletük* t_{12}. *Egy* m_3 *tömegű,* $t_3 < 0\ ^\circ\mathrm{C}$ *hőmérsékletű jégdarabot a kaloriméterben levő vízbe dobunk. Határozzuk meg az egyensúlyi közös hőmérsékletet a mennyiségek általános értékei mellett minden előforduló esetben. Az energiaveszteségeket hanyagoljuk el. A folyamat normális légnyomás mellett megy végbe. A réz fajhője* $c_1 = 0{,}1$ kcal/kg °C, *a jég fajhője* $c_3 = 0{,}5$ kcal/kg °C, *olvadási hője* $L = 80$ kcal/kg. *Vizsgáljuk meg ezt a numerikus esetet:* $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 1$ kg, $m_3 = 2$ kg, $t_{12} = 10$ °C, $t_3 = -20$ °C. *(A víz fajhője* $c_2 = 1$ kcal/kg °C.*)*

Megoldás. Ha a jeget bedobtuk a kaloriméter vizébe (2. ábra), akkor az egyensúly beállta után háromféle végállapothoz juthatunk: csak jég, csak víz, jég és víz van a kaloriméterben. Mindegyik esettel külön foglalkozunk.



2. ábra

a) A jég valamilyen (negatív) t hőmérsékletre melegszik fel, amihez $c_3 m_3 (t - t_3)$ kalória kell. Ezt a lehűlő kaloriméter és a víz fagyáshője adja:

$$c_3 m_3 (t - t_3) = c_1 m_1 (t_{12} - t) + c_2 m_2 t_{12} + m_2 L - c_3 m_2 t.$$

Innen az egyensúlyi hőmérséklet:

$$t = \frac{(c_1 m_1 + c_2 m_2) t_{12} + c_3 m_3 t_3 + m_2 L}{c_1 m_1 + c_3 m_2 + c_3 m_3}. \tag{1}$$

De ez a képlet csak addig használható, amíg t negatívnak adódik. Eszerint az *a)* eset bekövetkezésének feltétele:

$$(c_1 m_1 + c_2 m_2) t_{12} + c_3 m_3 t_3 + m_2 L < 0,$$

illetőleg:

$$(c_1m_1 + c_2m_2)t_{12} < -c_3m_3t_3 - m_2L. \tag{2}$$

(t_3 sajátmaga mindig negatív.)

b) Átugorva a közbeeső lehetőséget most azt vizsgáljuk meg, ha az adatok olyanok, hogy az egyensúlyi hőmérséklet pozitív, a kaloriméterben végül csak víz van. A jég két lépésben történő felmelegítéséhez és megolvasztásához szükséges hőmennyiséget a lehűlő kaloriméter adja:

$$-c_3m_3t_3 + m_3L + m_3t = (c_1m_1 + c_2m_2)(t_{12} - t).$$

Innen az egyensúlyi hőmérséklet:

$$t = \frac{(c_1m_1 + c_2m_2)t_{12} + c_3m_3t_3 - m_3L}{c_1m_1 + c_2m_2 + m_3}. \tag{3}$$

Ez a képlet csak akkor érvényes, ha t pozitívnak adódik, aminek feltétele:

$$-c_3m_3t_3 + m_3L < (c_1m_1 + c_2m_2)t_{12}. \tag{4}$$

c) Most foglalkozunk azzal a középső esettel, amikor a beálló egyensúly-állapotban víz és jég egymás mellett van a kaloriméterben. Ekkor biztosan $t = 0$ °C. (2) és (4) egybevetésével rögtön látszik, hogy ennek az esetnek a feltétele:

$$-c_3m_3t_3 + m_3L < (c_1m_1 + c_2m_2)t_{12} < -c_3m_3t_3 - m_2L. \tag{5}$$

(Azt is megfigyelhetjük, hogy azokban a határesetekben, amikor (2)-ben és (4)-ben egyenlőségjelet írunk, (1) és (3) t számára 0-t ad.) Ebben a *b)* esetben arra vagyunk kíváncsiak, mennyi jég és víz lesz a kaloriméterben. A lehűlő kaloriméter $(c_1m_1 + c_2m_2)t_{12}$ hőmennyiséget ad le. Lehet, hogy ebből a jég 0°-ra való felmelegítésén kívül még m_x gramm jég megolvasztására is jut:

$$(c_1m_1 + c_2m_2)t_{12} = -c_3m_3t_3 + m_xL$$

és így a megolvasztott jég mennyisége:

$$m_x = \frac{(c_1m_1 + c_2m_2)t_{12} + c_3m_3t_3}{L}.$$

De az is lehetséges, hogy a vízből m_x gramm hozzáfagy a jéghez és csak így képes a közös 0° létrejönni:

$$(c_1m_1 + c_2m_2)t_{12} + m_yL = -c_3m_3t_3,$$
$$m_y = \frac{-(c_1m_1 + c_2m_2)t_{12} - c_3m_3t_3}{L}.$$

A kaloriméterben végül is megtalálható víz mennyiségére mindegyik esetben egyformán ugyanaz a képlet következik:

$$m_v = m_2 + m_x = m_2 - m_y = m_2 + \frac{(c_1m_1 + c_2m_2)t_{12} + c_3m_3t_3}{L}.$$

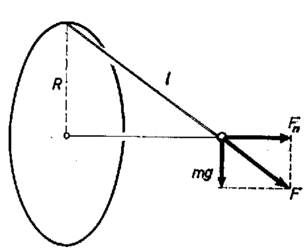
Látjuk: aszerint, hogy $(c_1m_1+c_2m_2)t_{12}$ nagyobb, kisebb vagy egyenlő $c_3m_3t_3$ abszolút értékéhez képest, aszerint olvad jég, hozzáfagy víz vagy mennyiségük az eredeti marad. A jég végső mennyisége $m_j = m_2 + m_3 - m_v$.

Feladatunk számadatai mellett $(c_1m_1 + c_2m_2)t_{12} = 11$ kcal, $c_3m_3t_3 = -20$ kcal, $-c_3m_3t_3 + m_3L = 180$ kcal, $-c_3m_3t_3 - m_2L = -60$ kcal, tehát (5) szerint a *b)* esetről van szó, a hőmérséklet $t = 0°$, $m_v = 0,8875$ kg, $m_j = 2,1125$ kg, a hozzáfagyás esete.

Maróti Péter

3. *Függőleges síkban elhelyezett drótkarika rádiusza* $R = 5$ cm. *A karika legfelső pontjához erősített szigetelő fonálon* $m = 1$ gramm *tömegű kis golyó lóg. Az egész karikának, azonkívül a golyónak* $Q = 9 \cdot 10^{-8}$ coulomb *egyező előjelű elektromos töltéseket adtunk és azt tapasztaltuk, hogy kitérítés után a golyócska éppen a karika síkjára merőleges szimmetriatengelyben helyezkedik el. Milyen hosszú a fonál?*

Megoldás. Ha a drótkarika töltése egyetlen pontban volna összpontosítva, akkor az erő Coulomb törvénye szerint $F = kQ^2/l^2$ lenne. A mi esetünkben a karika minden egyes részéről okozott erő nem esik a szimmetriatengelybe, hanem vele egyező szögeket zár be (3. ábra).



3. ábra

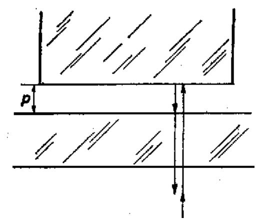
A kimozdítás szempontjából az F erők vízszintes vetületére van szükségünk, ezeknek az összege (F_n), tekintettel a szimmetrikus helyzetre úgy számítható, mintha az előbbi F erő vetületét keresnénk. Tekintettel a hasonló háromszögekre a súlyerő és F aránya R/l:

$$\frac{R}{l} = \frac{mg}{F} = \frac{mg}{kQ^2/l^2}.$$

Innen a fonálhossz: $l = \sqrt[3]{\frac{RkQ^2}{mg}}$. Ha a Coulomb-törvényben newtont, coulombot és métert használunk, akkor az arányossági szorzó $k = 9 \cdot 10^9$ és a feladat számadataival a fonálhossz $l = 7{,}2$ centiméter.

Kálmán Péter

4. 2 cm *élhosszúságú üvegkocka fölé üveglemezt helyezünk úgy, hogy a lemez és a kocka között vékony planparalel levegőréteg maradjon. A lemezre merőlegesen* 0,4 μ*-tól* 1,15 μ*-ig terjedő hullámhosszúságú elektromágneses hullámokat ejtünk és ezek a levegőréteg mindegyik oldalán visszaverődve interferálnak. Ebben a hullámhossztartományban csak két hullámhosszra teljesül az interferenciamaximum feltétele. Az egyiknél a hullámhossz* $\lambda_1 = 0{,}4\ \mu$. *Milyen vastag a levegőréteg?*



4. ábra

Megoldás. A d vastagságú levegőrétegben (4. ábra) a fény útja oda és vissza $2d$ hosszúságú. Figyelembe véve, hogy az üvegrétegen való visszaverődéskor 180°-os fáziskésés következik be, az adott λ_1 hullámú fény számára az erősítés feltétele:

$$2d = k_1\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{2}, \qquad \text{ahol } k_1 = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Ugyanígy a másik erősítést adó hullámhossz esetében:

$$2d = k_2\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{2}, \qquad \text{ahol } k_2 = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

A két feltétel összehasonlításából következik, hogy

$$\frac{2k_1 + 1}{2k_2 + 1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Tekintettel a megadott hullámhossz-tartományra, $\lambda_2/\lambda_1 = 1{,}15/0{,}4 = 2{,}875$ lehet a két hullámhossz arányának legnagyobb értéke. Ugyanakkor az arány legkisebb értéke 1. Így adódik az első feltétel:

$$1 < \frac{2k_1 + 1}{2k_2 + 1} < 2{,}875. \tag{6}$$

Fel kell használnunk a feladat azon kikötését, hogy csak két hullámnál teljesül a megadott intervallumban a maximum feltétele. A (6) egyenlőtlenség bal oldala mutatja, hogy $k_1 > k_2$. A feladat szerint csak egyetlen k_1 és k_2 van megengedve. Ha tehát k_1 megfelel, akkor $k_2 = k_1 - 1$-nek is meg kell felelni, de $k_2 = k_1 - 2$-nek már nem szabad megfelelni. Ha ugyanis megfelelne például $k_2 = k_1 - 3$ is, akkor szükségképp megfelelne $k_1 - 1$, $k_1 - 2$ is, mert ezek is egész számok. De ez tilos. Felírjuk a (6) egyenlőtlenség jobb oldalával, hogy $k_1 - 1$ megfelel, de $k_1 - 2$ nem felel meg:

$$A_1 = \frac{2k_1 + 1}{2(k_1 - 1) + 1} < 2{,}875, \tag{7}$$

$$A_2 = \frac{2k_1 + 1}{2(k_1 - 2) + 1} > 2{,}875. \tag{8}$$

Kipróbáljuk A_1 és A_2 értékeit k_1 néhány egészszámú értékénél:

k_1	0	1	2	3	4	...
A_1	-1	3	1,67	1,4	1,28	...
A_2	$-0,33$	-3	5	2,33	1,8	...

Látható, hogy (7)-nek megfelel minden $k_1 \geqq 2$, de (8)-nak csak $k_1 = 2$ felel meg. Tehát a λ_1 hullámhosszú fény interferenciájának rendje $k_1 = 2$, a λ_2-es fényé $k_2 = 1$.

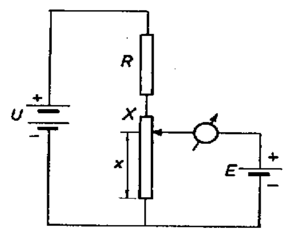
Kiinduló egyenletünkből most könnyen következik, hogy $2d = 2 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 = 1\mu$ és a levegőréteg keresett vastagsága $d = 0,5\mu$. A másik hullámhossz $2 \cdot 0{,}5 = 1 \cdot \lambda_2 + \dfrac{\lambda_2}{2}$ alapján $\lambda_2 = 0{,}667\mu$.

A feladat eredeti szövege szerint az is számítandó volt, hogy az üvegkocka $8 \cdot 10^{-6}$ fok^{-1} értékű lineáris hőkiterjedési együtthatója mellett hány fokos melegedés szükséges ahhoz, hogy az üvegkocka alulról hozzáérjen az üveglemezhez és megszűnjön az interferáló levegőréteg. A számítás szerint ehhez kb. 3°-os melegedés elegendő, ami arra figyelmeztet, hogy kényes optikai kísérleteknél milyen fontos a hőmérséklet állandósága.

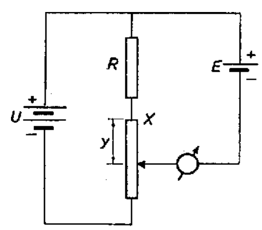
Spitzer József

5. Gyakorlati feladat. *Adva van áramforrás (két sorba kötött, elhanyagolható belső ellenállású NiFe akkumulátor), ismert R ellenállású ellenállásszekrény és X ismeretlen ellenállású mérődrót sorbakapcsolásával készült zárt áramkör. A mérődróton csúszó érintkező, mellette milliméterskála van. Egy szárazelemből és galvanométer-nulleszközből álló áramkört úgy kell az előbbi áramkörhöz hozzákapcsolni, hogy a nulleszközön ne folyjon áram. Meghatározandó a szárazelem és az akkumulátortelep kapocsfeszültségének hányadosa. Meghatározandó a mérődrót ismeretlen X ellenállása.*

Megoldás. A kapcsolás két lehetőségét az 5. ábra *a)* és *b)* rajza mutatja.



a)



b. ábra

5. ábra

$R + X$ ellenállások egy feszültségosztót alkotnak, amelynek egyik vagy másik végéről levehetjük az elem E elektromotoros erejével egyező feszültséget. A helyes beállításnál nem folyik áram, tehát az elektromotoros erőt mérjük (kompenzációs feszültségmérés). Az *a)* szerint végzett kísérletnél a nulleszköz helyes beállításakor a csúszó érintkező a mérődrót alsó végétől számítva x törtrésszel kifejezett helyzetben áll ($0 < x < 1$). A szárazelem E elektromotoros erejének és az akkumulátortelep U feszültségének aránya egyenlő az ellenállások arányával:

$$\frac{E}{U} = \frac{xX}{R + X}.$$

A *b)* elrendezés szerint is megkeressük azt a helyzetet, amikor a null-eszköz nem jelez áramot. Ez a csúszó érintkező felülről számított y törtrészénél valósult meg ($0 < y < 1$). A feszültségek aránya most:

$$\frac{E}{U} = \frac{R + yX}{R + X}.$$

Két egyenletünk egyenletrendszert alkot E/U és X ismeretlenekkel. Az egyenletrendszer megoldása adja a feleletet a feltett kérdésekre:

$$\frac{E}{U} = \frac{x}{1 + x - y}, \qquad X = R \cdot \frac{1}{x - y}.$$

Andor László