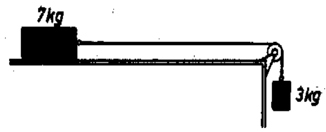
Az I. forduló feladatai

1. 7 kg *tömegű láda vízszintes lapon nyugszik. A ládához kötött, csigán átvetett fonál végére* 3 kg-*os tömeget akasztunk. Ennek elengedése után* 2 *másodperc múlva a fonalat elégetjük. Mekkora utat tesz meg a láda? Hol van a leszakadt súly a láda megáldásának pillanatában? (A láda és a súly mozgása számára a szükséges úthosszak rendelkezésre állnak.) A súrlódási együttható a sebességtől függetlenül* 0,2.

Megoldás. A lehetséges legnagyobb súrlódási erő $0{,}2 \cdot 7\text{kp} = 1{,}4$ kp $= 13{,}72$ newton. Ez működésbe lép, mert a láda mozog. A mozgató erő $(3-1{,}4)$ kp $= 1{,}6$ kp $= 15{,}68$ newton, a mozgatott tömeg 10 kg, ezért a keletkező gyorsulás $a = F : m = 15{,}68$ N : 10 kg = 1,568 m/s2. A második másodperc végén a sebesség $v = at = 3{,}136$ m/s, az addig megtett út $s = at^2/2 = 3{,}136$ m (1. ábra).



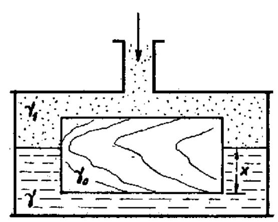
1. ábra

A fonál elégetése után a ládát a súrlódási erő fékezi, a fékező gyorsulás 13,72 newton : 7 kg = 1,96 m/s^2, a fékezés ideje $t = v/a = 3{,}136 : 1{,}96 = 1{,}6$ s. Ezalatt a láda útja s= $1{,}96 \cdot 1{,}6^2/2 = 2{,}509$ m; a láda összes útja 3,136 m + 2,509 m $\approx 5{,}65$ m.

A súly a fonál elégetésének a pillanatától kezdve függőleges lefelé hajítást végez 3,136 m/s kezdősebességgel. Ennek útja 1,6 s alatt $s = 3{,}136 \cdot 1{,}6 + 4{,}9 \cdot \cdot 1{,}62 \approx 17{,}6$ m.

2. *Egy tartályban víz van és ezen* 10 cm *vastagságú,* $\gamma_0 = 0{,}5$ p/cm^3 *fajsúlyú deszka úszik. A csövön át* 100 *atmoszféra nyomású levegőt nyomunk be a tartályba. Milyen mélyen merül be a deszka? (Tekintsük a vizet összenyomhatatlannak. A hőmérséklet nem változik.) A levegő fajsúlya* 1 *atmoszféra nyomáson* 0,0013 p/cm^3.

Megoldás. Két közeg határfelületén történő úszásról van szó (2. ábra).



2. ábra

Legyen x a folyadékba merülő rész magassága, d a deszka vastagsága és γ a folyadék fajsúlya. A levegő fajsúlya $\gamma_1 = 100 \cdot 0{,}0013 = 0{,}13$ p/cm^3, mert a fajsúly arányos a nyomással. Az alapterület legyen A. A deszka súlya egyenlő a folyadékba és a gázba merülő részek felhajtóerőinek összegével:

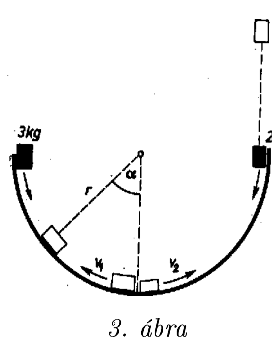
$$Ax\gamma + A(d-x)\cdot\gamma_1 = Ad\gamma_0.$$

Innen a folyadékba merülő rész magassága:

$$x = d \cdot \frac{\gamma_0 - \gamma_1}{\gamma - \gamma_1} = 10\text{ cm} \cdot \frac{0{,}5 - 0{,}13}{1 - 1{,}13} = 4{,}25\text{ cm.}$$

3. 4 *méter átmérőjű, belül üres félgömb átellenes felső pontjairól* $m_1 = 3$ kg-*os és* $m_2 = 2$ kg-*os tömegeket egyszerre engedünk el. Ütközésük teljesen rugalmas. Mekkora magasságot érnek el a testek az első ütközés után? A súrlódás elhanyagolandó.*

Megoldás. A két test egyszerre, egyformán $v = \sqrt{2gr}$ sebességgel érkezik a félgömb aljára (3. ábra).



3. ábra

Itt rugalmas ütközés megy végbe, melynek folyamán az impulzus is, a mozgási energia is állandó marad. A rugalmas ütközés ismert képleteivel az ütközés utáni sebességek:

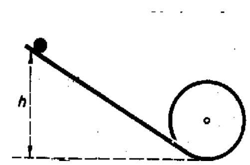
$$v_1 = -0{,}6v, \qquad v_2 = 1{,}4v.$$

A balra irányuló sebességet számítottuk negatívnak.

A 3 kg-os tömeg ezzel a v_1 sebességgel $m_1gh_1 = m_1v_1^2/2$ alapján $h_1 = 0{,}36r = 0{,}72$ méter magasságig fut fel a félgömb belsejében. A 2 kg-os tömeg v_2 sebességével $m_2gh_2 = m_2v_2^2/2$ szerint $h_2 = 1{,}96r = 3{,}92$ méter magasságig jut fel, ami azt jelenti, hogy a félgömb pereme fölé még $0{,}96r = 1{,}92$ méter magasságig felrepül függőlegesen.

A II. forduló feladatai

1. 30°*-os hajlásszögű lejtő* $R = 2$ méter *sugarú, függőleges síkú körpályához törés nélkül csatlakozik. A lejtőről* $h = 2R$ *magasságból* $r = 1$ cm *sugarú,* $m = 20$ gramm *tömegű golyót engedünk el (4. ábra).*

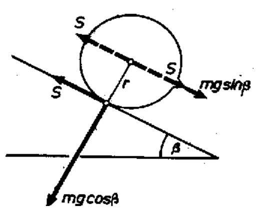


4. ábra

Legalábbis mekkora súrlódási együtthatóra van szükség, hogy a golyó csúszás nélkül guruljon végig?

(Nagy László)

Megoldás. Először vizsgáljuk meg, mi a feltétele annak, hogy β hajlásszögű lejtőn egy golyó megcsúszás nélkül, simán guruljon le (5. ábra).



5. ábra

A golyót a lejtő mentén $mg\sin\beta$ viszi lefelé, de az érintkezési pontban S súrlódási erő hat felfelé. A golyó középpontjában hozzáveszünk $\pm S$ erőt. Közülük a felfelé ható erőt összegezzük az $mg\sin\beta$ erővel. A golyó középpontja a állandó gyorsulással mozog lefelé, a mozgató erő:

$$ma = mg\sin\beta - S. \tag{1}$$

A golyót ezenkívül még Sr forgatónyomatékú erőpár forgatja. Mivel a szöggyorsulás egyenlő a forgatónyomaték és tehetetlenségi nyomaték hányadosával, ezért Sr forgatónyomaték Θ tehetetlenségi nyomaték mellett Sr/Θ szöggyorsulást okoz. A szöggyorsulást r rádiusszal szorozva a kerületmenti gyorsulást kapjuk meg:

$$a = \frac{Sr^2}{\Theta}. \tag{2}$$

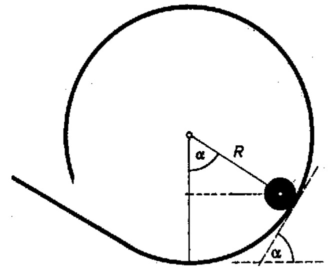
Az (1) és (2)-ből álló egyenletrendszer megoldása szolgáltatja a golyó haladó mozgásának a gyorsulását és a működő S súrlódási erőt:

$$a = g\sin\beta \cdot \frac{mr^2}{\Theta + mr^2}, \tag{3}$$

$$S = mg\sin\beta \cdot \frac{\Theta}{\Theta + mr^2}. \tag{4}$$

(L. egyébként a Lapok 1965. évi 6.számának 43. oldalát.)

Feladatunkban egy körpálya belsejében felszaladó golyóról van szó (6. ábra).



6. ábra

Határozza meg a golyó helyzetét a hozzávezető R rádiusznak a függőlegessel alkotott α szöge. Ebben a helyzetben a golyó pillanatnyilag α hajlásszögű lejtőn van, rá alkalmazhatók a (3) és (4) eredmények, természetesen β helyébe α-t téve. A golyó akkor mozog megcsúszás nélkül, ha a mozgásához szükséges súrlódási erő nem lépi túl azt az értéket, amely az adott súrlódási együttható mellett maximálisan keletkezhet. Ezért most megvizsgáljuk α függvényében mindkettőt.

A sima legördülés alkalmával szükséges súrlódási erő a golyó α szöggel jellemzett helyzetében (4) alapján:

$$S = mg\sin\alpha \cdot \frac{\Theta}{\Theta + mr^2}. \tag{5}$$

A maximálisan keletkezhető súrlódási erő számítása céljából szükségünk van arra az erőre, amely a golyót a merőlegesen kifelé nyomja a rádiusz irányában. Ez az erő az $mg\cos\alpha$ lejtőmenti súlyösszetevőnek és mv^2/R centrifugális erőnek az összege:

$$F_n = mg\cos\alpha + \frac{mv^2}{R}.$$

A kérdéses α helyzetben meglevő v sebességet az energiamegmaradás törvényével számítjuk. $mv^2/2$ haladásból származó mozgási energia mellett az ω szögsebességgel forgó golyónak $\Theta\omega^2/2 = \Theta v^2/2r^2$ forgási energiája is van. A lesüllyedés magassága $h - R + R\cos\alpha$, ha r-et elhanyagoljuk a sokkal nagyobb R mellett. Az energia megmaradása alapján:

$$mg(h - R + R\cos\alpha) = \frac{mv^2}{2} + \frac{\Theta v^2}{2r^2}.$$

Ebből az egyenletből a sebesség négyzete mint α függvénye:

$$v^2 = 2g(h - R + R\cos\alpha) \cdot \frac{mr^2}{\Theta + mr^2}.$$

Ezt behelyettesítjük F_n merőlegesen a falhoz nyomó erő előbbi kifejezésébe; összevonás után:

$$F_n = mg\left[2\left(\frac{h}{R} - 1\right) \cdot \frac{mr^2}{\Theta + mr^2} + \frac{\Theta + 3mr^2}{\Theta + mr^2} \cdot \cos\alpha\right]. \tag{6}$$

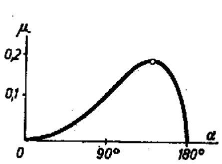
Ezt az F_n-t μ súrlódási együtthatóval megszorozva kapjuk a lehetséges legnagyobb súrlódási erőt: μF_n. Ha azt akarjuk, hogy a golyó ne csússzék meg, akkor μF_n, legalább is egyenlő kell, hogy legyen az (5) által megadott súrlódási erővel. (6) felhasználásával:

$$mg\sin\alpha \cdot \frac{\Theta}{\Theta + mr^2} = \mu mg\left[2\left(\frac{h}{R} - 1\right) \cdot \frac{mr^2}{\Theta + mr^2} + \frac{\Theta + 3mr^2}{\Theta + mr^2} \cdot \cos\alpha\right].$$

Ebből kifejezzük, miként függ a szükséges μ súrlódási együttható a golyó α szöggel jellemzett helyzetétől:

$$\mu = \frac{\sin\alpha}{2\left(\frac{h}{R} - 1\right)\frac{mr^2}{\Theta} + \left(1 + \frac{3mr^2}{\Theta}\right)\cos\alpha}. \tag{7}$$

A (7) alatti függést a 7. ábra mutatja.



7. ábra

A függvény maximuma, tehát a legnagyobb szükséges súrlódási együttható azon α_k szögnél van, amelyre

$$\cos\alpha_k = -\frac{3+\dfrac{\Theta}{mr^2}}{2\left(\dfrac{h}{R}-1\right)}.$$

[1] Felhasználva ezt az értéket (7)-ben, a szükséges legnagyobb súrlódási együttható:

$$\mu_k = \frac{\Theta}{\sqrt{4(mr^2)^2\left(\dfrac{h}{R}-1)\right)^2-(\Theta+3mr^2)^2}}$$

Feladatunk számadatait felhasználva $\Theta = 2mr^2/5$, $h/R = 3$ és így a (7) szerinti súrlódási együttható:

$$\mu = \frac{\sin\alpha}{10+8{,}5\cos\alpha};$$

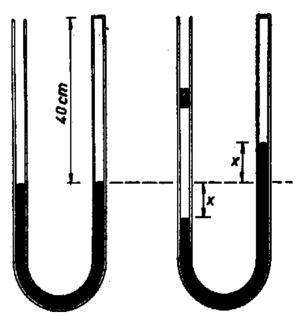
$\cos\alpha_k = -17/20 = -0{,}85$, $\alpha_k = 148{,}2^\circ$ és a szükséges legnagyobb súrlódási együttható:

$$\mu_k = \frac{2}{\sqrt{111}} = 0{,}1898.$$

Meg kell vizsgálni, hogy az a súrlódási együttható elegendő-e a $\beta = 30^\circ$-os leszaladó lejtőn a sima gördüléshez. (4) alapján megvizsgálva gömbnél a β szögű lejtőn legalább $2\ \mathrm{tg}\ \beta/7 = 0{,}165$ értékű súrlódási együttható szükséges. Ennél 0,1898 nagyobb, tehát a lejtőn is sima gördülés van.

2. *Hosszú U alakú cső mindegyik szárában egyenlő magasan áll a higany. Az egyik szár nyitott, a másik zárt. A cső keresztmetszet területe* 2,5 cm^2, *a jobb oldali szárban elzárt légoszlop hossza* 40 cm. *A higany fajsúlya* 13,6 p/cm^3. *Ezután a nyitott csővéget súrlódásmentes dugattyúval elzárjuk és erre a dugattyúra* 1190 pond*os súlyt helyezünk. Az új egyensúly beállta után hogyan helyezkednek el a higanyfelszínek?*

Megoldás. Célszelű a nyomásokat higanyoszlop-cm-ben számítani (8. ábra).



8. ábra

Tekintet nélkül a bal oldali légoszlop hoszszára, a 76 Hgcm légnyomáshoz a dugattyú folytán hozzáadódó nyomás $1190/(2{,}5\cdot 13{,}6) = 35$ Hgcm. Eszerint a bal oldali higanyfelszínen a nyomás $76 + 35 = 111$ Hgcm. Emiatt a higanyfelszínek x cm-rel mozdultak el. A nyomás a zárt csőben a higanyfelszín tetején $(111-$ $-2x)$ Hgcm. Alkalmazzuk Boyle–Mariotte törvényét a jobb oldali csőben elzárt levegőre:

$$2{,}5\cdot 40\cdot 76 = 2{,}5(40-x)(111-2x).$$

Rendezve:

$$2x^2 - 191x + 1400 = 0.$$

Ennek megoldása: $x_1 = 87{,}5$ cm, $x_2 = 8$ cm. Ez a második gyök használható, tehát a higanyfelszínek 8 cm-t mozdultak el lefelé és felfelé.

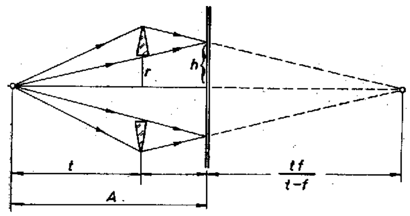
[1]*α_k értékét differenciálszámítással, vagy a következő összefüggés felhasználásával kaphatjuk meg:

$$\frac{\sin\alpha}{1+A\cos\alpha} = \sqrt{\frac{1}{1-A^2}\left[1-\left(\frac{A+\cos\alpha}{1+A\cos\alpha}\right)^2\right]}.$$

(Bodó Zalán)

3. $f = 4$ cm-*es gyújtótávolságú, kör alakú, vékony gyűjtőlencse közepén egy kör alakú lyuk van, amelynek átmérője a lencse átmérőjének fele. Egy faltól* $A = 9$ cm *távolságban pontszerű fényforrás van. Hová helyezzük a lencsét, hogy a falon egyetlen, kívül élesen határolt megvilágított kör keletkezzék?*

Megoldás. A lyuk határán átmenő sugárkúp az ernyőt h rádiuszú körben metszi (9. ábra).



9. ábra

A fényforrást leképező, a lencse külső szélén áthaladó fénysugaraknak ugyanezt a metszési kört kell adniok az ernyőn. Jelöljük a lyuk rádiuszát r-rel, a fényforrás lencsétől mért távolságát t-vel; ekkor képének távolsága a lencsétől: $tf(t-f)$. Hasonló háromszögekből:

$$\frac{h}{r} = \frac{A}{t},$$

$$\frac{h}{2r} = \frac{t + \dfrac{tf}{t-f} - A}{\dfrac{tf}{t-f}}.$$

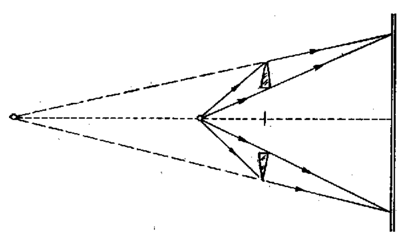
Ebből h/r kiejtése és rendezés után ez az egyenlet következik t-re nézve:

$$2t^2 - 2At + Af = 0.$$

Ennek megoldása:

$$t = \frac{A}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{A(A-2f)}.$$

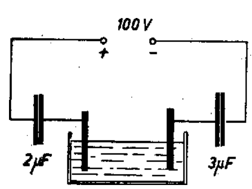
A mi esetünkben a fényforrás megkívánt elhelyezésére ez a két eredmény következik: $t_1 = 6$ cm, $t_2 = 3$ cm. Az első esetben a lencsét a fényforrástól 6 cm-re kell elhelyeznünk. Érdekes, hogy a második megoldás is eleget tesz a feladat követelményének, bár virtuális képalkotással jár (10. ábra).



10. ábra

Triviális megoldás még $t = 0$. A feladat csak akkor realizálható, ha $A > 2f$.

4. *A* 11. *ábra szerint összekapcsoltunk* 2 *mikrofarados kondenzátort, rézszulfát oldattal megtöltött elektrolizáló edényt és* 3 *mikrofarados kondenzátort. Mennyi vörösréz válik le, ha a drótok végeire* 100 *voltos áramforrást kapcsolunk? A vörösréz elektrokémiai egyenértéke* 0,33 mg/coulomb.



11. ábra

Megoldás. A kondenzátorok eredő kapacitása $2 \cdot 3/(2+3) = 1{,}2 \mu F$. A kondenzátorokat megtöltő töltés $1{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ coulomb. Ennyi töltés megy be a kondenzátorok szélső lemezeibe és ennyi osztódik meg a belső lemezekből álló fémtestben. Közben ez a töltés átmegy a rézszulfát oldaton és kiválaszt $0{,}33 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4} = 3{,}96 \cdot 10^{-8}$ gramm vörösrezet.

Az 1969. évi fizikai tanulmányt verseny eredménye:

I. díj: *Maróti Péter* (Szeged, Ságvári E. g. IV. o. t. Tanára: Vozáry Pálné).
II. díj: *Spitzer József* (Budapest, Vörösmarty M. g. IV. o. t. Tanára: Óhegyi Ernő).
III. díj: *Somorjai gábor* (Budapest, I. István g. III. o. t. Tanára: Főzy István).

A további helyezettek: 4. *Erdős Géza* (Budapest, József A. g. IV. o. t.), 5. *Horváthy Péter* (Budapest, Fazekas M. g. III. o. t.), 6. *Háy György* (Budapest, Eötvös J. g. IV. o. t.), 7. *Horváth András* (Budapest, Ady E. g. IV. o. t.), 8. *Ormos Pál* (Szeged, Radnóti M. g. III. o. t.), 9. *Grandpierre Attila* (Budapest, Fazekas M. g. IV. o. t.), 10. *Harmat Péter* (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. t.).