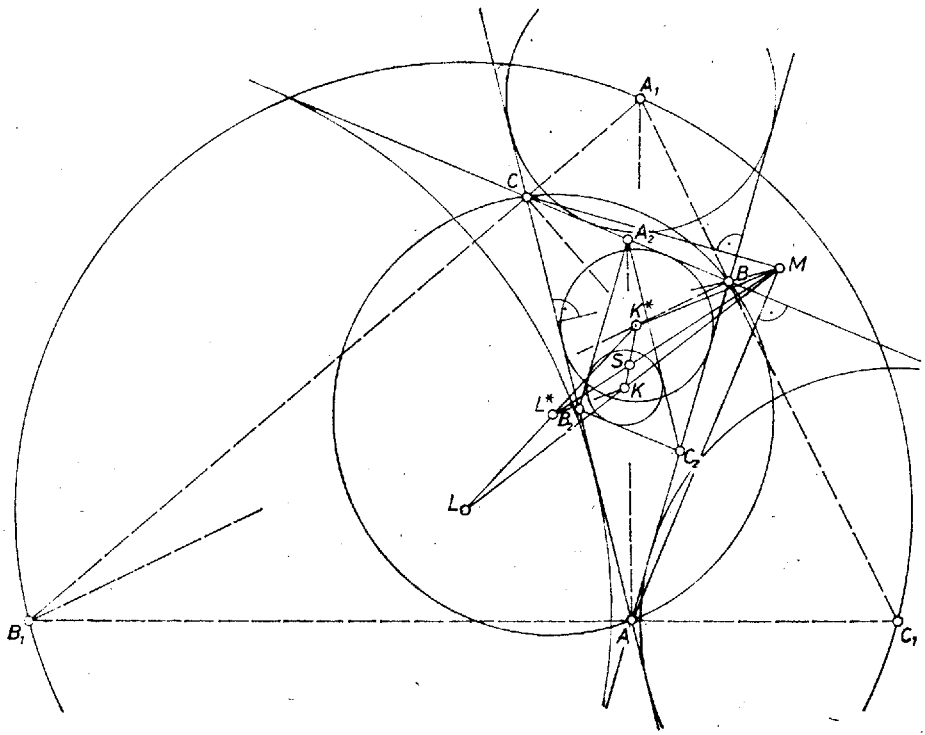
Jelöljük az eredeti háromszögbe beleírt és a köréje írt kör középpontját K^*-gal, illetve L^*-gal, a háromszög súlypontját S-sel.



1. ábra

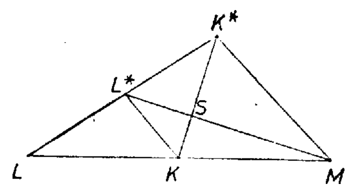
Azt fogjuk bizonyítani, hogy (1. ábra)

a) L^* felezi a K^*L szakaszt,

b) S az L^*M szakasz L^*-hoz közelebbi harmadolópontja,

c) S a KK^* szakasz K-hoz közelebbi harmadolópontja.

A b) és c) állítás szerint $KL^* \parallel K^*M$ és $KL^* = K^*M/2$, hiszen a KL^*S és K^*MS háromszögek hasonlók, és megfelelő oldalaik aránya $KS : SK^* = 1 : 2$ (2. ábra).

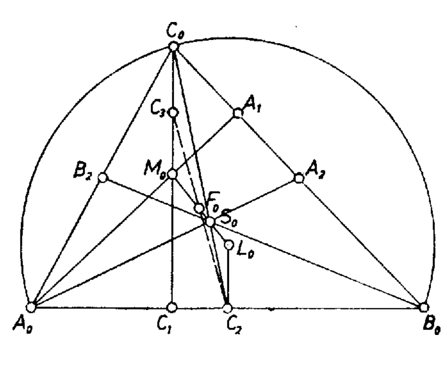


2. ábra

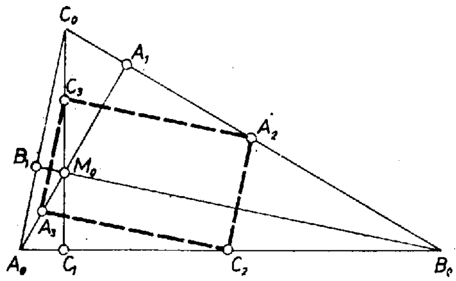
Eszerint a K^*L^* és MK egyenesek metszik egymást, és L' metszéspontjukra teljesül, hogy L^* felezi az $L'K^*$ szakaszt és K felezi az $L'M$ szakaszt. Mivel az első tulajdonság csak K^*-nak L^*-ra vonatkozó tükörképére teljesülhet, és a) szerint L-nek megvan ez a tulajdonsága, L azonos L'-vel, tehát K felezi az LM szakaszt, amint azt bizonyítani akarjuk.

Elegendő tehát az a), b), c) állításainkat bebizonyítanunk. Ehhez fel fogjuk használni a következő két állítást (3–4. ábra):

I. Egy $H_0 = A_0B_0C_0$ háromszögben a csúcsoknak a szemközti oldalakon levő A_1, B_1, C_1 vetületei, és a B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 szakaszok A_2, B_2, C_2 felezőpontjai rajta vannak egy k_0 körön, amelynek F_0 középpontja az L_0M_0 szakasz felezőpontja, ahol M_0 a H_0 magasságpontja, L_0 a köréje írt kör középpontja, S_0 pedig H_0 súlypontja.



3. ábra



4. ábra

II. A H_0 háromszög S_0 súlypontja az L_0M_0 szakasz L_0 hoz közelebbi harmadolópontja.

Az I. állításban szereplő k_0 kört a H_0 háromszög Feuerbach-féle körének, az M_0, S_0, L_0 pontokon átmenő egyenest pedig a háromszög Euler-féle egyenesének nevezzük. Állításaink bizonyítása sok helyen megtalálható ugyan, az azonban olyan egyszerű, hogy érdemes itt megismételni.

I. Jelöljük az A_0M_0, B_0M_O, C_0M_0 szakaszok felezőpontját rendre A_3-mal, B_3-mal, C_3-mal. Az $A_0B_0M_0$ háromszögnek A_3C_2 középvonala, ez a szakasz tehát fele akkora, mint az M_0B_0 szakasz, és párhuzamos vele. Ugyanígy kapjuk, hogy C_3A_2 is az M_0B_0-nak, A_3C_3 és C_2A_2 pedig az A_0C_0 szakasznak felére kicsinyített képe. Mivel pedig M_0B_0 merőleges A_0C_0-ra, azért ezekből következik, hogy az $A_2C_3A_3C_2$ négyszög téglalap, tehát az A_2A_3, C_2C_3 szakaszok feletti Thalész-körök azonosak. Ugyanígy láthatjuk be, hogy az A_2A_3 és B_2B_3 feletti Thalész-körök is azonosak, tehát van olyan k_0 kör,amely az A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 pontok mindegyikén átmegy, legyen ennek a középpontja F_0.

Mivel az A_2A_3 szakasz A_1-ből derékszög alatt látszik, A_1 is rajta van k_0-on, és ugyanígy B_1 és C_1 is rajta van. Mivel F_0 a C_2C_3 szakasz felezőpontja, és a C_0C_1, C_2L_0 egyenesek párhuzamosak, az L_0 pont F_0-ra vonatkozó tükörképe rajta van a C_0C_1 egyenesen. Ugyanígy kapjuk, hogy ez a tükörkép rajta van az A_0A_1, B_0B_1 magasságvonalakon is, tehát ez a tükörkép az M_0 magasságpont. Eszerint F_0 valóban felezi az L_0M_0 szakaszt.

II. Az S_0 centrumú $(-1/2)$ arányú centrális hasonlóság az $A_0B_0C_0$ háromszöget az $A_2B_2C_2$ háromszögbe viszi, tehát az $A_0B_0C_0$ köré írható kört az $A_2B_2C_2$ köré írható körbe és az elsőnek L_0 középpontját a másodiknak a középpontjába, F_0-ba viszi, vagyis S_0 az F_0L_0 szakasz F_0-hoz közelebbi harmadolópontja. Mivel másrészt F_0 felezi az L_0M_0 szakaszt, ezekből következik, hogy S_0 az L_0M_0 szakasz L_0-hoz közelebbi harmadolópontja.

Rátérünk az előrebocsátott a), b), c) állítások bizonyítására. Jelöljük az eredeti háromszöget H-val, a hozzáírt körök középpontjai által meghatározott háromszöget H_1-gyel, H középháromszögét H_2-vel. Mivel a H-hoz írható körök középpontjai rendre a H két külső és egy belső szögfelezőjének a metszéspontjai, ezért H_1 oldalai H-nak külső szögfelezői, továbbá H belső szögfelezői a H_1-ben magasságvonalak. Eszerint K^* a H_1-nek magasságpontja, H a H_1-nek talpponti háromszöge, és a H köré írható kör H_1-nek Feuerbach-köre. Tehát az I. állítás szerint L^* felezi a K^*L szakaszt, amint azt a)-ban állítottuk. Mivel az M, S, L^* pont rendre H magasságpontja, súlypontja, és köréje írt körének a középpontja, azért a II. állítást H-ra alkalmazva kapjuk a b) állítást. Az S centrumú, $(-1/2)$ arányú hasonlóság H-t H_2-be, K^*-ot K viszi, tehát S a KK^* szakasz K-hoz közelebbi harmadolópontja. Ezzel a c) állítást is bebizonyítottuk, megoldásunk végére értünk.