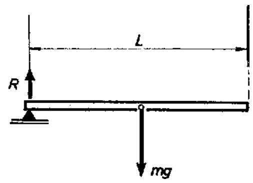
Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 1968. október 19-én rendezte fizikai versenyét. A versenyzők 5 óráig dolgozhattak és bármilyen segédeszközt használhattak. Az alábbiakban ismertetjük a verseny feladatait és azok megoldását.

1. *m tömegű, L hosszúságú rúd egyik végén ékkel van alátámasztva, másik végén fonállal van felfüggesztve. A fonalat elégetjük. A mozgás megindulásának pillanatában mekkora erővel nyomja a rúd az éket?*

Megoldás: A rúd mozgását β szöggyorsulással kezdi el.



1. ábra

Ha az éket tekintjük tengelynek (1. ábra), akkor a súly forgatónyomatéka $mgL/2$ és a tehetetlenségi nyomaték a rúd végpontjára vonatkoztatva $mL^2/3$. Ezek hányadosa adja a szöggyorsulást:

$$\beta = \frac{mgL/2}{mL^2/3} = \frac{3g}{2L}.$$

Az éknél R reakcióerő nyom felfelé. A β szöggyorsulást úgy is számíthatjuk, mintha a rúd a középpontja körül forogna; ekkor a forgatónyomaték $RL/2$, a tehetetlenségi nyomaték $mL^2/12$ és ismét ezek hányadosa adja a szöggyorsulást:

$$\beta = \frac{RL/2}{mL^2/12} = \frac{6R}{mL}.$$

A szöggyorsulás kétféleképp kiszámított értékeit egyenlővé téve:

$$\frac{3g}{2L} = \frac{6R}{mL}.$$

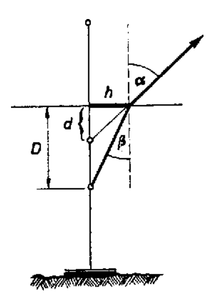
Innen az éknél működő erő:

$$R = \frac{mg}{4}.$$

Tehát a mozgás megindulásának pillanatában a rúd súlyának negyedével nyomja az éket. A szöggyorsulás $3g/2L$ értékéből megtudjuk, hogy a rúd súlypontja $\beta L/2 = 3g/4$, vége pedig $\beta L = 3g/2$ gyorsulással indul el.

2. 4 *méter mély medence fenekén síktükör fekszik. Egy fényképész gépével* 2 *méter magasan van a víz szintje felett. A víz szintje alatt* 2 *méter mélyen hal úszik. Hány méterre kell a gép lencséjét élesre állítani, ha a) az úszó halat, b) a hal tükörképét akarja lefényképezni?*

Megoldás. A víz alól β mélységből induló fénysugár (2. ábra) a vízben β szöget alkot a beesési merőlegessel.



2. ábra

A levegőbe kilépve a fénysugár a beesési merőlegestől törik, vele α szöget alkotva, azután a levegőben úgy halad tovább, mintha d mélységből jönne. Ha n a törésmutató, akkor a fénytörés törvénye szerint:

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Kis szögeknél a sinus helyett vehető a tangens és ekkor közelítő pontossággal:

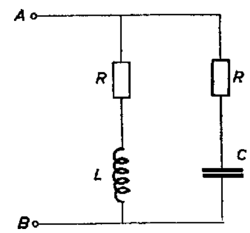
$$n = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{h/d}{h/D} = \frac{D}{d}, \qquad \text{vagyis} \qquad d = \frac{D}{n}.$$

Tehát n törésmutatójú anyagréteg a törésmutató arányában hozza közelebb a tárgyat. De ez csak kis szögeknél érvényes, ha majdnem pontosan merőlegesen vagyunk a hal fölött. Szigorúan véve nincs is képalkotás, az egyetlen D mélységben levő pontból kiinduló fénysugarak a levegőben úgy haladnak tovább, hogy hátrafelé rajzolt meghosszabbításaik nem találkoznak egyetlen pontban. A gyakorlatban ez a körülmény nem szokott szerepet játszani, mert csak szűk sugárnyalábot használunk fel. A víz törésmutatója 4/3.

a) esetben a levegőben mért 2 méterhez még $2:4/3=1{,}5$ métert kell hozzáadnunk és a szükséges élesre állítási távolság $2+1{,}5=3{,}5$ méter.

b) esetben figyelembe kell vennünk, hogy a hal tükörképe olyan sajátságú, mintha a vízben még 2 méterrel volna a fenék alatt. Tehát a sugármenet olyan, mintha 6 méteres vízben megtett út után kerülne ki a levegőbe. Tehát a levegőben számított 2 méterhez $6:4/3=4{,}5$ métert kell hozzáadni és így a szükséges élesre állítási távolság $2+4{,}5=6{,}5$ méter.

3. *A rajz szerinti kapcsolásban (3. ábra) mindkét ohmos ellenállás egyenlő (R). Az A és B pontokra váltófeszültséget kapcsolunk. Mekkora legyen L és C, hogy az egész berendezés R nagyságú ohmos ellenállásként viselkedjék?*



3. ábra

Megoldás. Mindkét ágban ω körfrekvenciájú sinusos váltóáram folyik:

$$I_L=\frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cdot\sin(\omega t-\varphi_L),$$
$$I_C=\frac{U_0}{\sqrt{R^2+1/\omega^2C^2}}\cdot\sin(\omega t+\varphi_C).$$

φ_L, illetve φ_C az áramerősség fáziskülönbsége a feszültséghez képest. A váltóáramok tanából ismeretes, hogy:

$$\operatorname{tg}\varphi_L=\frac{\omega L}{R},$$
$$\operatorname{tg}\varphi_C=\frac{1/\omega C}{R}.$$

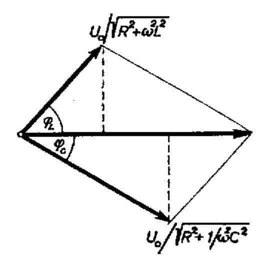
A szögfüggvények összefüggései alapján a sinus és cosinus:

$$\sin\varphi_L=\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}},\quad \cos\varphi_L=\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}},$$
$$\sin\varphi_C=\frac{1/\omega C}{\sqrt{R^2+1/\omega^2C^2}},\quad \cos\varphi_C=\frac{R}{\sqrt{R^2+1/\omega^2C^2}}.$$

A két sinusos áram összege a teljes áram, amelynek $U_0\sin\omega t/R$-nek kell lennie.

Ismeretes, hogy ugyanazon frekvenciájú, de különböző fázisú sinus-függvények formálisan a paralelogrammatétel szerint adhatók össze. (Lásd például a Középiskolai Matematikai Lapok 1964. évi februári számának 82. oldalán.) Az amplitúdókat a fázisszögek felhasználásával arányos hosszúságú nyilakkal rajzoljuk fel és ezeket a paralelogrammaszerkesztéssel összegezzük. Az átló megadja az eredő sinus-függvény amplitúdóját és fázisszögét.

A mi esetünkben mérjük fel a két váltóáram amplitúdóját és fázisszögét az adott váltófeszültséghez képest (4. ábra).



4. ábra

A paralelogramma átlójának a feladat szerint a váltófeszültség irányába kell esnie. Eszerint az átlóra merőleges vetületeknek ellentétesen egyenlőknek kell lenni:

$$\frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cdot\sin\varphi_L=\frac{U_0}{\sqrt{R^2+1/\omega^2C^2}}\cdot\sin\varphi_C;$$

Felhasználva a fázisszögek sinusainak előbb felírt értékeit:

$$\frac{\omega L}{R^2+\omega^2L^2}=\frac{1/\omega C}{R^2+1/\omega^2C^2}.$$

Ennek rendezésével kapjuk:

$$R^2=\frac{L}{C}\cdot\frac{1-\omega^2LC}{1-\omega^2LC}.$$

Tehát annak feltétele, hogy az eredő áramerősség a rákapcsolt feszültséggel egyező fázisban legyen:

$$R^2=\frac{L}{C}.$$

Ha ez a feltétel teljesül, akkor az egész berendezés ohmos ellenállásként viselkedik. De vajon mekkora ohmos ellenállásként?

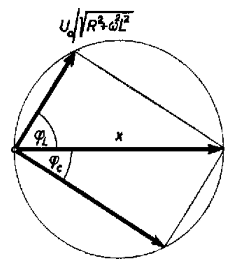
Minden, a 3. ábra szerinti párhuzamos kapcsolásnál a fázisok tangenseinek szorzata:

$$\operatorname{tg}\varphi_L\cdot\operatorname{tg}\varphi_C=\frac{\omega L}{R}\cdot\frac{1/\omega C}{R}=\frac{L}{CR^2},$$

függetlenül a frekvenciától. De a mi esetünkben, ha megvalósítjuk az $R^2=L/C$ feltételt:

$$\operatorname{tg}\varphi_L\cdot\operatorname{tg}\varphi_C=1,$$

vagyis a fázisszögek pótszögek, $\varphi_L+\varphi_C=90^\circ$, a 4. ábra paralelogrammája téglalap és annak átlója egy Thales-kör átmérője.



5. ábra

Az 5. ábrában téglalapként rajzolt paralelogramma átlója, mint egy derékszögű háromszög átfogója:

$$x=\frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}:\cos\varphi_L=\frac{U_0}{R}.$$

Felhasználtuk $\cos\varphi_L$ előbb felírt értékét. Tehát betartva a feszültség fázisát teljesítő $R^2=L/C$ feltételt egyidejűleg teljesül az a kívánság is, hogy az eredő ellenállás R. Vagyis a feladat megoldása: úgy választandó L és C, hogy hányadosuk R ellenállás négyzete legyen. Ez a feltétel független a frekvenciától. A rezonancia esete sem kivétel, ekkor a téglalapból négyzet lesz.

A verseny eredménye. Az I. díjat nyerte *Babai László*, a budapesti tudományegyetem matematikus hallgatója, (tavaly a budapesti Fazekas gimnáziumban Hutai Ferenc tanítványa). A két II. díjat nyerték: *Marossy Ferenc* honvéd (tavaly a budapesti Fazekas gimnáziumban Hutai Ferenc tanítványa) és *Nagy Zsigmond*, a budapesti tudományegyetem matematikus hallgatója, (tavaly a budapesti Kaffka M. gimnáziumban Fekete Eszter tanítványa). III. díjat kapott *Vetier András*, a budapesti tudományegyetem matematikus hallgatója, (tavaly a budapesti Fazekas gimnáziumban Hutai Ferenc tanítványa). A versenyen résztvevő középiskolai tanulók közül dicséretet és könyvjutalmat kapott *Maróti Péter*, a szegedi Ságvári gimnázium IV. o. tanulója (tanára Dr. Vozáry Pálné). Dicséretet kaptak még a gimnáziumi tanulók közül: *Andor László, Bajmóczy Ervin, Balogh Gábor, Horváthy Péter*, az érettségizettek közül *Bernus Péter, Egri Róbert, Grósz Tamás, Várhelyi Ferenc.*