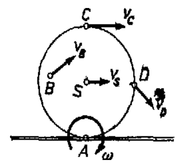
A csúszásmentes gördülés energiaviszonyai

Az előzőekben (1. az I. és a II. részt a májusi, ill. szeptemberi számban) említettük, hogy csúszásmentes gördülés során a pillanatnyi forgástengely a gördülő hengernek a felülettel való érintkező egyenese, illetve gömb esetén a pillanatnyi forgástengely az érintkezési ponton megy keresztül. A gördülő test pontjainak sebessége általában más és más (1. ábra), ezért a mozgási energiának $W_{\text{kin}} = \dfrac{1}{2}\sum m_1 \cdot v_i^2$ összefüggés alapján történő kiszámítása matematikai nehézségekbe ütközik.



1. ábra

Mivel a gördülés úgy tekinthető, mint a pillanatnyi forgástengelyek körül történő elemi forgások sorozata, azért a gördülő test mozgási energiája a pillanatnyi forgástengelyre vett forgási energia lesz:

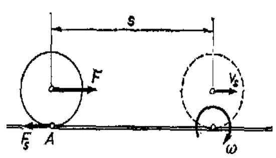
$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\cdot\Theta_A\omega^2.$$

Steiner tétele értelmében $\Theta_A = \Theta_s + mr^2$, ezért $W_{\text{kin}} = (1/2)\Theta_s\omega^2 + (1/2)m\cdot r^2\cdot\omega^2 = (1/2)\Theta_s\omega^2 + (1/2)m\cdot v_s^2$, ahol felhasználtuk a csúszásmentes gördülést kifejező $v_s = \omega\cdot r$ kinematikai kapcsolatot.

Ezek szerint a gördülő test összes kinetikus energiája a súlypont haladó mozgásából származó energiának és a súlyponton átmenő tengely körüli forgómozgásból származó energiának az összege.

Az energiatétel és az energiamegmaradás elvének alkalmazása

A dinamikai tárgyalással egyenértékűen alkalmazhatjuk az energiatételt. Nézzük meg ezt egy előzőekben tárgyalt problémán (2. ábra).



2. ábra

Számítsuk ki, mekkora sebességre tesz szert a test s út befutása után, ha a súlypontján átmenő állandó nagyságú erő hatására csúszásmentesen gördül.

A végzett munkát és a kinetikai energia növekedését egyenlővé téve

$$F\cdot s = (1/2)\Theta_s\omega^2 + (1/2)mv_s^2,$$

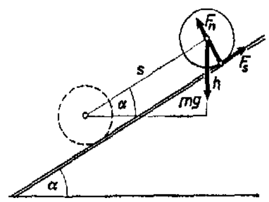
majd felhasználva az $\omega = v_s/r$ összefüggést, v_s számítható. Hogy a végzett munkában sem F_n, sem mg munkája nem szerepel, az nyilvánvaló. Mindkét erő merőleges az elmozdulásra, ezért munkavégzésük 0. De miért nem szerepel F_s munkája? Mint említés történt, F_s vagy a nyugalmi vagy határesetben a tapadási súrlódás.

Az erő a pillanatnyi forgástengelyen megy keresztül, de ezeknek a pontoknak a pillanatnyi sebessége zéró. Az elemi elmozdulásoknak nincs erőirányú vetülete, ezért a végzett elemi munka is zérus. Így általában is igaz, hogy nyugalomban levő felület esetén a nyugalmi és tapadási súrlódás munkája 0.

Ugyanazt az eredményt kapjuk, ha a munkavégzés $W = M\cdot\alpha$ képlete alapján a pillanatnyi forgástengelyre képezzük a $\sum M\Delta\alpha = \sum M\omega\Delta t$ összeget, ahol $M = = F\cdot r$, $\sum\omega\Delta t = \alpha$, $r\sum\omega\Delta t = s$. Az s a súlypont által megtett út. A végzett munkából jelenleg is kimarad F_s (természetesen mg és F_n is), mert átmegy a pillanatnyi forgástengelyen és így e tengelyre a nyomatéka 0.

A leggyakrabban a mechanikai energiák megmaradásának elve alkalmazható, melynek feltétele, hogy a testre ható erők munkája 0 legyen. Ezen erők közé nem szabad a gravitációs erőt besorolni, mert annak munkája a helyzeti energia megváltozásának figyelembe vételével számítandó.

A 3. ábra a lejtőn legördülő test esetét mutatja, melynél a 2. ábrával kapcsolatban mondottak értelmében F_s és F_n munkája 0.

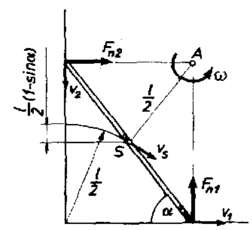


3. ábra

Igaz tehát az, hogy

$$(1/2)mv_s^2 + (1/2)\Theta_s\omega^2 = m \cdot g \cdot h.$$

Az $\omega = v_s/r$ figyelembe vételével például v_s a h függvényében számítható.



4. ábra

Az ismételten visszatérő 4. ábra szerinti elrendezésben (fal mellett súrlódásmentesen lecsúszó rúd) F_{n1} és F_{n2} munkája 0, mert az egyik szemlélet szerint mindkettő átmegy a pillanatnyi forgástengelyen, vagy a másik szemlélet szerint, mert mindkettő merőleges támadáspontjának pillanatnyi elmozdulására (sebességére). Ezért

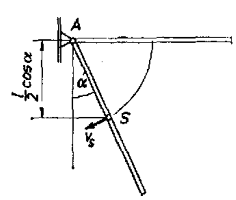
$$m \cdot g\frac{l}{2}(1 - \sin\,\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{4}\right)\omega^2.$$

Ebből az összefüggésből ω, majd v_s, számítható:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g \cdot (1 - \sin\,\alpha)}{l}}, \quad \text{és}$$

$$v_s = \omega\,\frac{l}{2} = \sqrt{\frac{3g \cdot l \cdot (1 - \sin\,\alpha)}{4}}$$

Egy másik probléma, melyet az előző részben nem vizsgáltunk meg, az egyik végén csapágyazott és vízszintes helyzetben elengedett rúd esete (5. ábra).



5. ábra

Itt az F_A erő munkája 0, mert egyrészt az A pont nem mozdul el, vagy a másik szemlélet szerint azért, mert F_A átmegy a forgástengelyen. Ezért

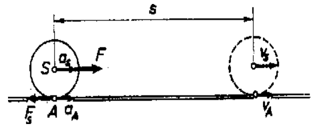
$$m \cdot g \cdot (l/2) \cdot \cos\,\alpha = (1/2)(1/3)m \cdot l^2 \cdot \omega^2,$$

amiből

$$\omega = \sqrt{\frac{3g \cdot \cos\,\alpha}{l}} \quad \text{és} \quad v_s = \omega l/2 = \sqrt{\frac{3g \cdot l \cdot \cos\,\alpha}{4}}.$$

v_s ismeretében pedig már számolható a tengelyben ébredő centripetális erő, ezzel az előzőekben ismertetett dinamikai elemzés teljessé tehető.

A két utóbbi esetben hangsúlyoznunk kell, hogy a sebességeket nem az idő, hanem a hely függvényében tudjuk elemi módszerekkel meghatározni. Lényegesen bonyolultabb a helyzet csúszó gördülés esetén, amikor a súrlódási együttható, s ezzel a súrlódási erő nagysága is adott. Ekkor a súrlódási erő munkája nem 0, tehát az energiatételben is szerepelni fog. A 6. ábrán látható elrendezésben meg kell határozni, hogy mennyit csúszik a test a felületen, míg a súlypont s utat tesz meg.



6. ábra

A súlypont gyorsulása $a_s = F/m - \mu g$, a szöggyorsulás $\beta = \dfrac{\mu \cdot m \cdot g \cdot r}{\Theta_s}$, ezzel az A pont gyorsulása[1]

$$a_A = a_s - \beta \cdot r = \frac{F}{m} - \mu \cdot g - \frac{\mu \cdot g \cdot m \cdot r^2}{\Theta_s}.$$

Az s út megtételéhez szükséges idő

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a_s}},$$

és a két felület relatív sebességéből származó út

$$s_1 = \frac{a_A}{2} t^2.$$

A súrlódás folytán végzett munka*

$$W = F_s \cdot s_1 = \mu \cdot m \cdot g \cdot s \left[1 - \frac{m^2 \cdot r^2 \cdot \mu \cdot g}{\Theta_s (F - \mu \cdot m \cdot g)} \right].$$

Az energiatétel értelmében

$$F \cdot s - \mu \cdot mg \cdot s \left[1 - \frac{m^2 \cdot r^2 \cdot \mu \cdot g}{\Theta_s (F - \mu \cdot m \cdot g)} \right] = \frac{1}{2} m \cdot v_s^2 + \frac{1}{2} \Theta_s \omega^2.$$

Csakhogy most $v_s \neq r \cdot \omega$, hanem* $v_s = a_s \cdot t = \sqrt{2s \left(\dfrac{F}{m} - \mu g \right)}$, továbbá $\omega = \beta \cdot t =$

$$= \frac{\mu \cdot mg \cdot r}{\Theta_s} \sqrt{\frac{2sm}{F - \mu \cdot mg}}.$$

Az energiatétel és e két utolsó egyenlet egyikének felhasználásával vagy v_s vagy ω számítható*, mindkét összefüggésnek az energiatételbe való helyettesítése természetesen azonosságot ad.*

E számításokból is látható, hogy csúszó gördülés esetén nem érdemes az energiatételt alkalmazni, kinematikai és dinamikai elemzésből a probléma megoldása kényelmesebben adódik. A probléma teljesen hasonló megoldásokat igényel akkor, ha a súlypont kezdősebessége vagy a kezdeti szögsebesség nem 0, illetve ezeknek egyik speciális eseteként $F = 0$. Ilyen feladat szerepelt az 1966. évi tanulmányi verseny 2. fordulójában, ahol szintén nem volt célszerű energetikai vizsgálatot végezni.

[1] A csillaggal megjelölt részek számolását az olvasónak célszerű elvégeznie.