Legyen az adott parabola egyenlete

$$y = ax^2 \tag{1}$$

ahol a tetszőleges pozitív szám. A parabola $(x_0,\, y_0)$ koordinátájú pontjához tartozó érintő m meredeksége egyenlő az ax^2 függvény x_0-beli deriváltjával:

$$m = 2ax_0, \tag{2}$$

és az illető érintő egyenlete, mindjárt $y_0 = ax_0^2$ helyettesítéssel, rendezéssel

$$y - y_0 = 2ax_0(x - x_0), \qquad y + ax_0^2 = 2ax_0x. \tag{3}$$

Ha a sík tetszőleges $P(u,\, v)$ koordinátájú pontjából érintőt akarunk húzni a parabolához, akkor meg kell keresnünk a parabolának azt (vagy azokat) az érintőjét (érintőit), amelyek átmennek P-n. Eszerint olyan x_0-t keresünk, amelyre a (3) egyenletű egyenes átmegy az $(u,\, v)$ ponton, azaz teljesül:

$$v + ax_0^2 = 2ax_0u. \tag{4}$$

Ez adott $(u,\, v)$ pont esetén másodfokú egyenlet az x_0 ismeretlenre. Mivel (4)-ből átrendezéssel az

$$a(x_0 - u)^2 = au^2 - v \tag{5}$$

egyenletet kapjuk, azért (4)-nek akkor és csakis akkor van két (különböző) valós megoldása, ha

$$au^2 > v. \tag{6}$$

(Ez a feltétel szemléletesen azt jelenti, hogy a $P(u,\, v)$ pont a parabola $(u,\, au^2)$ pontja alatt van, egyszerűen: P az (1) egyenletű parabola alatt van.)

Ha tehát P koordinátáira teljesül (6), akkor P-ből a parabolához két érintő húzható. Jelöljük ezek meredekségét m'-vel és m''-vel, ezek az illető egyeneseknek az x tengellyel bezárt α' és α'' szögeinek a tangensei. A két érintő közti szög (ez megállapodás szerint a két egyenes által meghatározott szögek közül a $90°$-nál nem nagyobbat jelenti) akkor $45°$, ha $|\alpha' - \alpha''| = 45°$ vagy $|\alpha' - \alpha''| = 135°$,

azaz $\quad |\mathrm{tg}\ (\alpha' - \alpha'')| = \left|\dfrac{\mathrm{tg}\ \alpha' - \mathrm{tg}\ \alpha''}{1 + \mathrm{tg}\ \alpha'\ \mathrm{tg}\ \alpha''}\right| = \left|\dfrac{m' - m''}{1 + m'm''}\right| = |\mathrm{tg}\,(\pm 45°)| = 1.$

Ez akkor, és csakis akkor teljesül, ha

$$(m' - m'')^2 = (1 + m'm'')^2. \tag{7}$$

Láttuk, hogy az $(u,\, v)$ pontból húzott érintők érintési pontjának az $x_0',\, x_0''$ abszcisszái a (4) egyenlet gyökei, így (2) és a gyökök és együtthatók közti összefüggés alapján

$$m' + m'' = 2a(x_0' + x_0'') = 4au, \qquad m'm'' = 4a^2x_0'x_0'' = 4av. \tag{8}$$

Célszerű tehát (7)-et úgy átalakítani, hogy benne az m', m'' meredekségek összege és szorzata szerepeljen:

$$(m' + m'')^2 - 4m'm'' = (1 + m'm'')^2.$$

Eszerint a $P(u,\, v)$ pont akkor és csakis akkor tartozik a vizsgált mértani helyhez, ha az $(u,\, v)$ koordinátákra teljesül (6), és a (7)-ből (8) alapján kapható

$$(4au)^2 - 16av = (1 + 4av)^2 \tag{9}$$

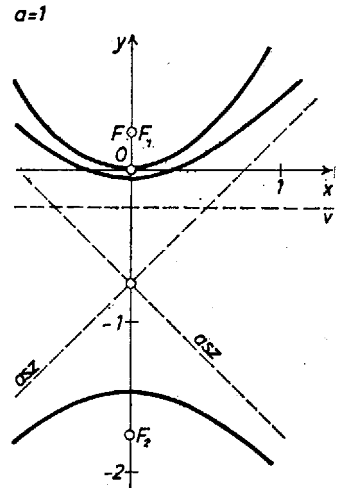
egyenlet. Ez utóbbiból már következik (6), hiszen (9) bal oldalán $16a(au^2 - v)$ áll, ahol a zárójelbeli kifejezés (6) két oldalának a különbsége, és (9) jobb oldalán pozitív szám áll. (Nem lehet ugyanis 0 sem a (9) jobb oldalának az értéke, mert $v = -1/4a$ mellett (9) bal oldalának az értéke minden u-ra pozitív volna.) Mármost (9)-et rendezve ezt kapjuk:

$$\left(v + \frac{3}{4a}\right)^2 - u^2 = \frac{1}{2a^2}. \tag{10}$$

Ez tehát a vizsgált mértani hely egyenlete (1. ábra).[1]

---

[1]Feladatunk a *Czapáry E.–Horvay K.–Reiman I.–Dr. Soós P:* Geometriai feladatok gyűjteménye c. mű 1. kiadásában (1964) úgy szerepelt 3954. feladatként, hogy a parabola *látószöge* $45°$. Ez hiperbolánknak csak az alsó ágára teljesül, a felső ágon $135°$ a látószög.

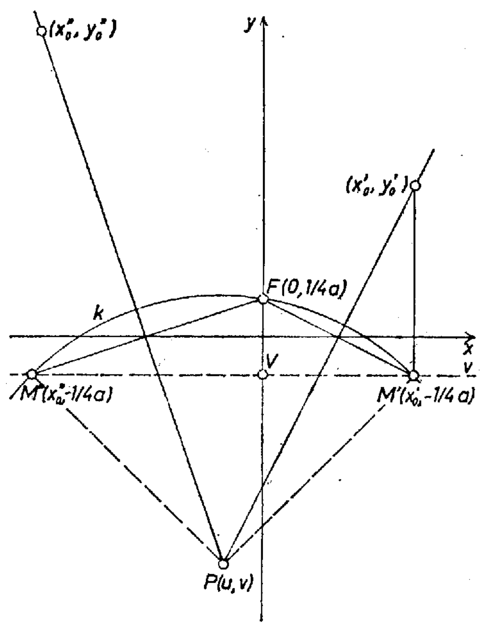


1. ábra

Megjegyzés. Láttuk, hogy a parabolához a $P(u,\, v)$ külső pontból húzott érintők érintési pontjainak az abszcisszái a (4) egyenlet gyökei. (4)-et (5) alapján még az

$$(x_0 - u)^2 + \left(-\frac{1}{4a} - v\right)^2 = (0 - u)^2 + \left(\frac{1}{4a} - v\right)^2 \tag{11}$$

alakban is felírhatjuk, eszerint az $(x_0, -1/4a)$ pont rajta van az $(u,\, v)$ középpontú és a $(0,\, 1/4a)$ ponton átmenő k körön (2. ábra).



2. ábra

Ebből az is kiolvasható, hogy az $y = ax^2$ parabola azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyek az $F(0,\, 1/4a)$ ponttól (a fókusztól) és az $y = -1/4a$ egyenestől (a vezéregyenestől) egyenlő távolságra vannak. Ha a parabola az F fókuszával és a v vezéregyenesével van megadva, akkor (11) alapján úgy lehet hozzá a P külső pontból érintőt húzni, hogy a P körüli, F-en átmenő körrel metsszük a v egyenest, és vesszük a metszéspont és F által meghatározott szakasz felező merőlegesét.

Ennek alapján visszavezethetjük feladatunkat az 1698. feladatra.[2] Legyenek ugyanis a P körüli, F-en átmenő k kör és a v egyenes metszéspontjai M' és M''. Az FM', FM'' szakaszok felező merőlegesei közti szög akkor lesz 45°-os, ha $M'P$ és $M''P$ merőlegesek egymásra, vagyis a $PM'M''$ szög 45°-os, és ugyanennyi k és v szöge is. Az 1698. feladat megállapítása szerint azoknak a P pontoknak a mértani helye, amelyek körül F-en átmenő kört rajzolva e kör v-t $\alpha = 45°$-os szögben metszi, az a hiperbola, amelynek egyik fókusza F, centruma az FV egyenesnek az a C pontja (V az F vetülete v-n), amelyre

$$FC = \left(1 + \frac{\cos^2\,\alpha}{\sin^2\,\alpha}\right) \cdot FV,$$

[2] Lásd a megoldását K. M. L. 42 (1971) 52. old.

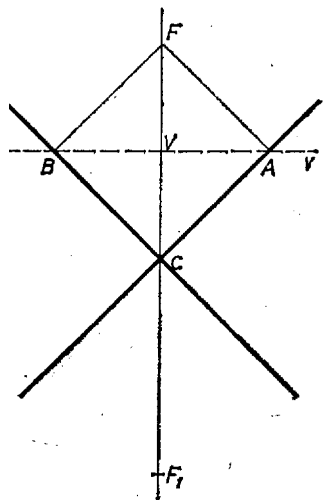
tehát $\alpha = 45°$ mellett C az F pont v-re vonatkozó tükörképe, és a hiperbola valós tengelyének fele–hossza

$$a = \frac{\cos\,\alpha}{\sin^2\,\alpha}\,FV = \sqrt{2}\cdot FV.$$

A kapott eredményt szemlélteti a 3. ábra: legyen az $FACB$ négyzet AB átlója a v egyenesen, F-nek C-re vonatkozó tükörképe pedig legyen F_1. Ekkor azoknak a P pontoknak a mértani helye, amelyekből az F fókuszú, v vezéregyenesű parabolához húzott érintők közti szög 45°-os, a

(12) $$|PF - PF_1| = 2\cdot AC$$

tulajdonsággal definiált görbe, vagyis az az F, F_1 fókuszú hiperbola, melyre nézve a valós tengely fele–hossza AC. (Aszimptotái az AC, BC egyenesek.)



3. ábra

Ha tudjuk, hogy

$$\frac{(y-c_2)^2}{a^2} - \frac{(x-c_1)^2}{b^2} = 1$$

annak a hiperbolának az egyenlete, amelyiknek a valós tengelye párhuzamos az y tengellyel, valós tengelyének fele a, képzetes tengelyének fele b és centrumának a koordinátái (c_1, c_2), akkor a vizsgált mértani hely (12) alatti geometriai definíciója (10)-ből is kiolvasható.