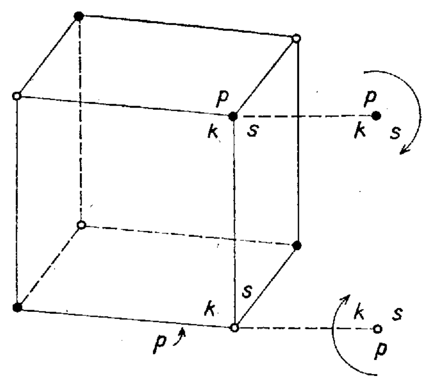
Az egyező színű lappárok a dobozon vagy szomszédosak lehetnek, azaz van közös élük, vagy párhuzamosak. A színezési lehetőségek osztályozása céljára első szempontnak azt vesszük, hogy a doboz három párhuzamos lappárja közül hány pár van egyező színűre festve. Nyilvánvalóan lehet úgy festeni, hogy nincs ilyen pár, lehet úgy, hogy csak 1 van, ha pedig 2 párt már így festettünk, akkor a harmadik is ilyen, tehát ez a szám $p = 3$, vagy 1, vagy 0.

1. Legyen $p = 3$. Ez a *kocka* befestését egyértelműen meghatározza. Így ugyanis mind a 8 csúcsban 3 különböző szín fut össze, és két csúcs között csak az a különbözőség képzelhető el, hogy a csúcsot magunk felé fordítva a 3 szín az óramutató járása irányában haladva vagy $p$ (piros), $s$ (sárga), $k$ (kék) vagy $p$, $k$, $s$ sorrendben követi egymást. Ha mármost a festés során valamelyik csúcsban megválasztottuk ezt a sorrendet, ezzel már meghatároztuk a teljes kocka befestését, és a kiszemelt csúccsal szomszédos 3 csúcsban éppen a fordított sorrend adódik (1. ábra, a 4–4 db világos és sötét köröcske jelöli az egyező körüljárásokat).




*1. ábra*

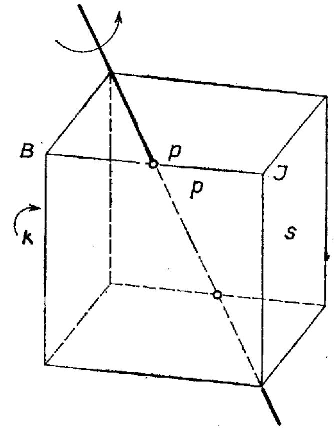
Arra is tekintettel voltunk eredményünk kimondásában, hogy a kétféle csúcsnégyes egymás helyére juttatható, éspedig például a vízszintes lapok középpontjait összekötő laptengely körüli 90°-os elfordítással (bármelyik irányban).

A *gyufásdoboz*nak három különböző lapja van: egy nagy téglalap, amelyiken a címke van, egy hosszúkás téglalap, amelyiken a dörzsfelület van, és egy kis téglalap, ez a belső rész kívülről is látható lapja (röviden $N$, $H$ és $K$ lapok). Az $N$ alakú két párhuzamos lap színét 3-féleképpen választhatjuk meg, ezután a $H$-lapok színét a még nem használt két szín közül 2-féleképpen, és ezzel a $K$-lapok színe minden esetben egyértelműen meghatározott. Így $3 \cdot 2 = 6$-féle kifestést kapunk, és ezek mind különbözők, hiszen közülük bármelyik kettőhöz található az $N$, $H$, $K$ lapok között olyan, amelyiknek az egyik színezés szerint más a színe, mint a másik szerint.

2. Legyen most $p = 1$ és fessük egyező színűre – $a$ színűre – a *kocka* alap- és fedőlapját. Ekkor a függőleges laptengely körül forgatva, a másik két szín sorrendje csak $b$, $b$, $c$, $c$, $b$, $b$, $c$, ... lehet, és bármelyik lapot választhatjuk előlapnak, tehát a festés mondott „betű-terve" egyértelmű. Ebből aszerint kapunk 3 különbözően festett kockát, hogy a helyére melyik színünket választjuk.

*Gyufásdoboz* esetén az egyező színűre festett lappárt 3-féleképpen választhatjuk meg. Ha már ezt megválasztottuk (mondjuk az $N$-lapok színe ugyanaz) és megválasztottuk ennek a lapnak a színét is (amire most is 3 lehetőségünk van), a még nem használt két színt a $H$-lapokhoz és a $K$-lapokhoz is használnunk kell, és csak arról dönthetünk, hogy e két lap színezéseit (a doboz $N$-re merőleges tengelye körüli forgatásával) milyen sorrendben csatlakoztatjuk egymáshoz. A gondolható kétféle színezés azonban nem különbözik egymástól, mert ha a dobozt úgy tartjuk, hogy az $N$-lapok vízszintesek legyenek, majd az alsó lapot felülre fordítjuk, a kétféle színezés egymásba megy át. Tehát a gyufásdoboznak $p = 1$ mellett $3 \cdot 3 = 9$ lehetséges színezése van.

3. Végül $p = 0$ esetében mind a három szín 2 előfordulása egy élben találkozik, legyen ez a kocka esetében a piros színre a fedőlap elülső $BJ$ éle (2. ábra).




*2. ábra*

Ekkor a $B$-be és $J$-be befutó harmadik lapoknak, vagyis a bal és jobb oldallapnak különbözőknek kell lenniük. Nem jelent különbözőséget, hogy a jobb lapot sárgára vagy kékre festjük, a bal lapot pedig kékre, ill. sárgára, hiszen e két lap a $BJ$ él felezőpontján átmenő éltengely körüli $180^\circ$-os elfordítással egymásba vihető át, a kocka fedi a kiindulási helyzetét és a 2 piros lap fölcserélődik. Legyen tehát a jobb oldallap sárga és így a bal kék. A hátralevő 2 lap közül második sárgának vehető az alsó vagy a hátulsó és ez a 2 lehetőség már különböző, és egyértelműen meghatározza a második kék lap helyzetét.

Ezek szerint kocka $1+3+2=6$-féleképpen színezhető a feladat követelményeinek megtartásával.

Gyufásdoboz esetében az iménti piros lappár és él helyére 3-féleképpen választhatunk: $N$ és $H$ lap, $N$ és $K$, $H$ és $K$ lap közös élét. Továbbá nem vihetjük át egymásba a két piros lapot a mondott $180^\circ$-os forgatással, így a lehetőségek száma 3-mal és 2-vel szorzódva $2\cdot 3\cdot 2=12$ lesz.

A doboz tehát $6+9+12=27$-féleképpen festhető ki.

*Pálffy László* (Pécs, Széchenyi I. Gimn., II. o. t.)