I. megoldás. Tegyük fel, hogy a feladat állítása nem igaz, vagyis van olyan c valós szám és $a \neq b$ valós számpár, hogy

$$a^3 - 4a^2 + 9a + c = 0,$$
$$b^3 - 4b^2 + 9b + c = 0.$$

Vonjuk ki az utóbbit az előbbiből, így a különbségből kiemelhetjük $(a-b)$-t:

$$(a-b)\big\{(a^2 + ab + b^2) - 4(a+b) + 9\big\} = 0. \tag{2}$$

Itt a második tényező értéke határozottan pozitív, hiszen így alakítható:

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(a^2+b^2) - 4(a+b) + 9 = \frac{1}{2}(a+b-4)^2 + \frac{1}{2}(a^2+b^2) + 1.$$

Ellentmondásra jutottunk tehát, mert a (2) bal oldalán álló szorzat egyik tényezője sem lehet 0. Az állítást ezzel bebizonyítottuk.

II. megoldás. Ismét azt tesszük fel, hogy van olyan c valós szám, hogy az (1) bal oldalán álló

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + 9x + c$$

polinomnak két különböző valós zérushelye van, mondjuk x_1 és x_2. Mivel $p(x_1) = 0$, azért $p(x)$ így alakítható:

$$p(x) = p(x) - p(x_1) = (x - x_1)\big\{x^2 + (x_1 - 4)(x + x_1) + 9\big\}. \tag{3}$$

Eszerint $p(x_2) = 0$ csak úgy teljesülhet, ha a kapcsos zárójelbeli tényezőre

$$x_2^2 + (x_1 - 4)(x_2 + x_1) + 9 = 0.$$

Nem változik tehát a kapcsos zárójelbeli kifejezés, ha belőle ezt levonjuk:

$$x^2 + (x_1 - 4)(x + x_1) + 9 = (x - x_2)(x + x_2 + x_1 - 4),$$

és így (3)-ból

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x + x_1 + x_2 - 4) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

következik, ahol $x_3 = 4 - x_1 - x_2$. Ezt a háromtényezős szorzatot kifejtve x együtthatója $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, s mivel ez a szorzat azonos $p(x)$-szel, ez az együttható egyenlő $p(x)$ eredeti alakjában az x együtthatójával, 9-cel:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 9.$$

Ebből viszont $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ alapján

$$x_1^2 + +x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 4^2 - 2 \cdot 9 = -2$$

következik, ami valós számokra nem teljesülhet.

III. megoldás. Tetszőleges valós c mellett a $p(x) = x^3 - 4x^2 + 9x + c$ függvény szigorúan monoton nő, mert a deriváltja pozitív:

$$p'(x) = 3x^2 - 8x + 9 = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{11}{3} > 0.$$

Emiatt, ha $p(x)$-nek van egy valós zérushelye, mondjuk x_1, akkor $x < x_1$ mellett $p(x) < 0$ és $x > x_1$ mellett $p(x) > 0$, tehát $p(x)$-nek x_1-en kívül más valós gyöke nem lehet.

Pipek János (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Azt mondjuk, hogy $p(x)$ polinomnak $x = a$ többszörös gyöke, ha van olyan $q(x)$ polinom, melyre azonosan teljesül:

$$p(x) = (x-a)^2 \cdot q(x).$$

Ha $p(x)$-nek az a szám többszörös gyöke, akkor $p'(a) = 0$, hiszen a $p(x)$ fenti alakját deriválva azt kapjuk, hogy

$$p'(x) = 2(x-a) \cdot q(x) + (x-a)^2 \cdot q'(x),$$

és itt mindkét tag 0-val egyenlő az $x = a$ helyen. Eszerint, ha egy polinom deriváltjának nincs valós gyöke, akkor a polinomnak nem lehet többszörös gyöke. Tehát a $p(x) = x^3 - 4x^2 + 9x + c$ polinomnak többszörös gyöke sem lehet, hiszen deriváltja minden x-re pozitív. Ez az állítás a II. megoldásban alkalmazott módszerrel is bebizonyítható.