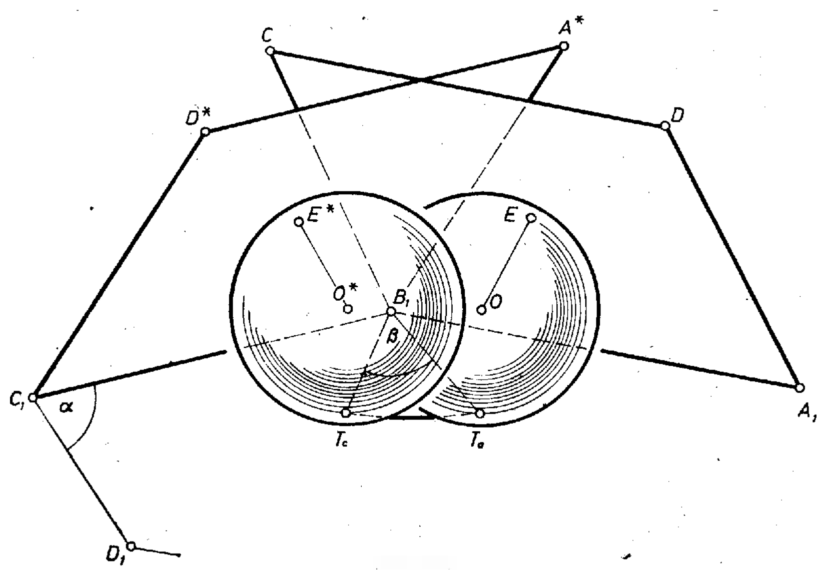
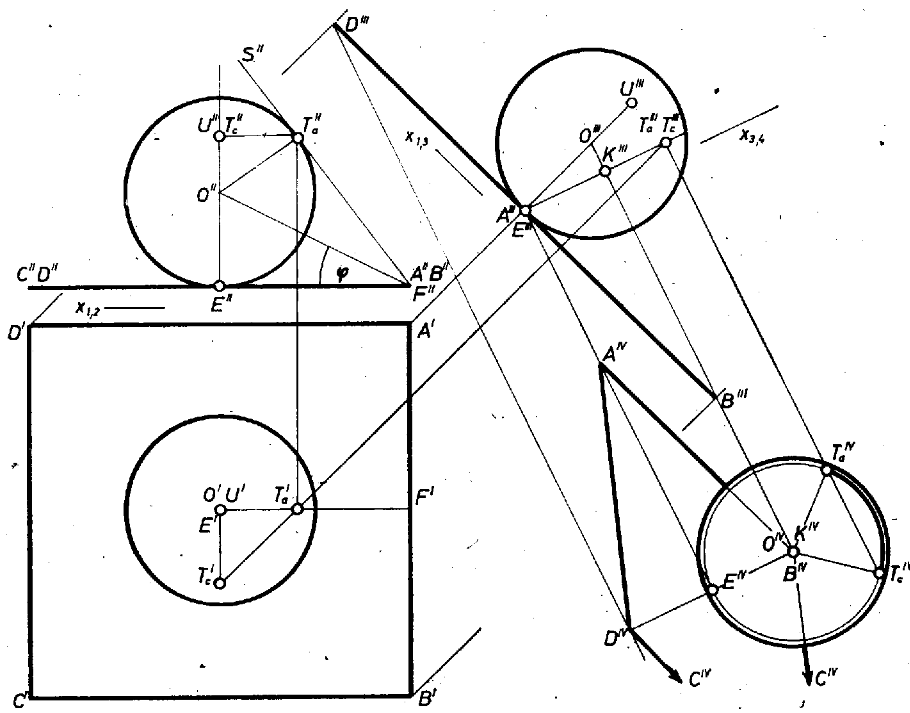
A gömb O középpontját E-vel összekötő egyenes mind a négyzetnek, mind a gömbnek 90° szögű forgási szimmetriatengelye, tehát az egész gördülő rendszernek is, így a lemez 4 csúcsának környezete egybevágó. Ezért a lemez élei $A_1B_1C_1D_1A_2B_2\ldots$ nyomának leírásához elég meghatározni az $A_1B_1C_1\sphericalangle=\alpha$ szöget, ennek ismeretében a nyom egymáshoz csatlakozó, $AB=a$ hosszúságú szakaszokból álló törött vonal, mindegyik tagja ugyanolyan irányú, α nagyságú szöggel van elfordulva az előzőhöz képest.

Legyen G-nek S-re való támaszkodási pontja a megindulási helyzetben T_a, abban a helyzetben, amikor C az S-re, a fenti C_1-be ér, T_c és egy tetszés szerinti közbülső helyzetben T, továbbá e pontok S-beli nyoma rendre T_{a1}, T_{c1}, T_1.



1. ábra

(Az 1. ábra a rendszer 2 állapotát mutatja, amikor AB-re és amikor BC-re támaszkodik; a 2. ábrán viszont a rendszer ábrázoló geometriai vetületeit látjuk, a lemez az első képsíkon fekszik és S-et két helyzetben gondoljuk hozzátámasztva; két transzformált vetületet is ad az ábra.)



2. ábra

Amikor G a $T\equiv T_1$ pontban érinti S-et, az érintkezés folytán OT_1 merőleges S-re, ezért az OT_1B_1 (és a vele azonos OTB) derékszögű háromszög egybevágó az OEB háromszöggel, hiszen G a lemez síkját is érinti. Így $B_1T_1=BT=BE=a/\sqrt{2}$, állandó, és az OBT szög is állandó. Ennélfogva minden szóba jövő helyzetben BT egy BO tengelyű kúp alkotója, a változó alkotónak S-en hagyott B_1T_1 nyoma mindig sugara annak a $B_1T_{a1}T_{c1}$ körcikknek, ami a kúppalást BT_a és BT_c alkotói közti cikkének S-re való kiterítése; G nyoma pedig e körcikknek $T_{a1}T_{c1}$ határoló íve.

A B_1T_{a1} és B_1T_{c1} sugarak a keresett $A_1B_1C_1$ szöget 3 részre osztják, közülük $A_1B_1T_{a1}$ és $T_{c1}B_1C_1$ egyenlők az $ABT_a = ABE = 45°$ szöggel, hiszen pl. T_a az E-nek tükörképe a BOA síkra. A szög középső része ívmértékben, majd a kúp alapköre megfelelő ívére áttérve

$$\beta = T_{a1}B_1T_{c1}\sphericalangle = \frac{\widehat{T_{a1}T_{c1}}}{B_1T_{a1}} = \frac{\widehat{T_aT_c}}{BE} = \frac{T_aK}{BE}\cdot T_aKT_c\sphericalangle = \frac{EK}{BE}\cdot 2 \text{ arc } \sin\frac{T_aT_c}{2EK} =$$
$$= 2\frac{EK}{BE}\text{ arc } \sin\frac{T_aU}{\sqrt{2}\cdot EK},$$

ahol K a kúp alapkörének középpontja, U pedig T_a és T_c közös vetülete az EO tengelyen, hiszen a T_aT_cU háromszög nyilvánvalóan derékszögű és egyenlő szárú.

T_a a fenti tükrözés szerint benne van AB felező merőleges síkjában. Legyen még AB felezőpontja F és $OFE\sphericalangle = \varphi$, ekkor (2. ábra, 2. vetület)

$$T_aU = FE - FT_a \cos 2\varphi = FE(1-\cos 2\varphi) = a \sin^2\varphi = \frac{4ar^2}{a^2+4r^2}.$$

Másrészt K egyszersmind az E-nek is a BO-n levő vetülete (2. ábra, 3. vetület), így

$$EK = \frac{EB\cdot EO}{BO} = \frac{ar}{\sqrt{a^2+2r^2}},$$

és ezt behelyettesítve általában, majd a numerikus esetben fok-egységekre áttérve

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta = \frac{\pi}{2} + \frac{4r}{\sqrt{2a^2+4r^2}}\cdot \text{ arc } \sin\frac{2r\sqrt{2a^2+4r^2}}{a^2+4r^2},$$
$$\alpha = 90° + \frac{2}{3}\cdot\frac{180°}{\pi}\text{ arc } \sin\frac{3}{5} = 90° + \frac{2}{3}\cdot 36°52{,}2' = 114°34{,}8'.$$

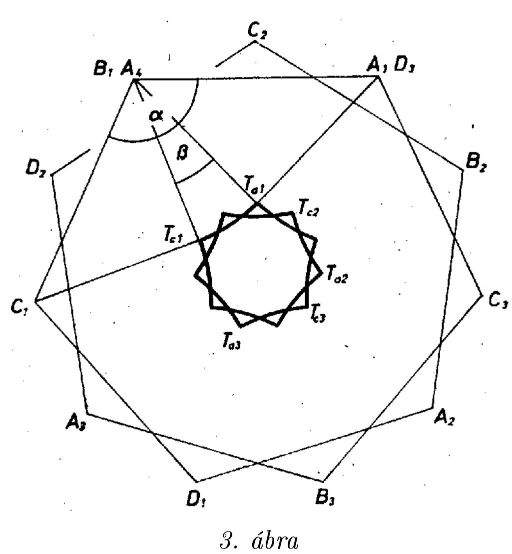
Ezek szerint a rendszer nyoma egyrészt az egymáshoz α szöggel csatlakozó a hosszúságú szakaszokból alakuló törött vonal, másrészt az a körívláncolat, amelyben az egyes ívek középpontjai a töröttvonal töréspontjai, sugaruk $a/\sqrt{2}$, középponti szögük $\beta = \alpha - 90°$, az ívek csatlakozó pontjai a törött vonal szakaszaival egyenlő szárú derékszögű háromszögeket alkotnak, és a szomszédos ívek közti szög derékszög.

Könnyű belátni, hogy a törött vonal szögpontjai általában egy körön helyezkednek el, és a körívláncolat ennek a belsejében, ill. rajta kívül halad aszerint, hogy α kisebb, ill. nagyobb, mint 180°. Ha pedig $\alpha = 180°$ – ami az r/a arány egy bizonyos értékénél következik be $(0{,}6335\ldots)$, akkor a négyzet élének nyoma egyenes, a körívláncolat egyes ívei pedig negyedkörök.

Az adott numerikus eset érdekessége, hogy a törött vonal külső szöge jó közelítéssel

$$180° - \alpha = 65°25{,}2' \approx \frac{720°}{11}(= 65°27{,}3'),$$

így a vonal 12-ik tagja, D_3A_4 közel egybeesik az A_1B_1 első taggal, kezdő-pontjaik szögeltérése kisebb, mint 0,4°. Ettől eltekintve azt mondhatjuk, hogy a lemez nyoma olyan szabályos csillag-11-szög, melynek mindegyik oldala a többi 9 csúcsot 1 : 8 arányban[1] osztja ketté (3. ábra).



3. ábra

[1]Ebben a kifejezésben az „arány” szó nemcsak a sporteredményekben szokásos jelentésével helyes, hanem a szó matematikai jelentésére szorítkozva sem válik határozatlanná a kijelentés, hiszen az 1 : 8 arányon túl a két szám összegét, 9-et is kimondtuk, a két szám így meg van határozva. – Ezzel a megjegyzéssel természetesen nem kívánunk éket verni a két beszédmód közé, hanem éppen olvasóink tisztánlátását akarjuk tudatosítani. *(Szerk.)*

Garay Barnabás (Sopron, Széchenyi I. Gimn., IV. o. t.)
Gáspár Gyula (Miskolc, Herman O. Gimn., III. o. t.)
Horváth László (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Gimn., III. o. t.)
dolgozatai alapján.

Megjegyzés. Azt, hogy $\alpha = 180^\circ$-os törésszöget r/a-nak valamely, az $1/2$ és $1/\sqrt{2}$ közti értékénél kapunk (a mondott 0,63…-nál), abból sejthető, hogy $r/a = 1/2$ esetén a G-hez B-n át állított minden érintősík hegyesszöggel hajlik a lemezhez, kivéve kettőt, amelyek derékszöggel hajlanak (pontosabban az érintősíknak csak azt a félsíkját tekintjük, amely a lemeznek azon az oldalán van, mint G), $r/a = 1/\sqrt{2}$ esetén pedig – egyetlen derékszög kivételével – már minden ilyen hajlásszög tompaszög.