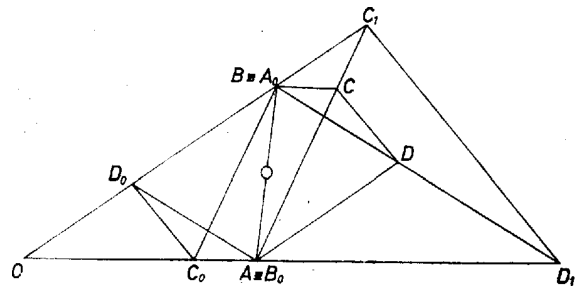
A négyszögről nincs föltételezve, hogy konvex, ennélfogva lehet konkáv és hurkolt is. Csúcsairól csak azt használhatjuk fel, hogy közülük semelyik három nincs egy egyenesen. Így a feladat első részében az A-n átmenő, BC-vel párhuzamos egyenes nem azonos BC-vel és nem párhuzamos BD-vel, tehát D_1 létrejön, és ugyanígy C_1 is. Vegyük észre, hogy az A, B betűpár és egyidejűen a C, D pár tagjait is egymással fölcserélve, az alakzat változatlan marad.

a) Tükrözzük az $ABCD$ négyszöget az AB szakasz felezőpontjára és jelöljük a csúcsok tükörképét rendre A_0-lal, B_0-lal, C_0-lal D_0-lal (1. ábra).



1. ábra

Mivel $CD||C_0D_0$, elegendő azt megmutatni, hogy a feladatban szereplő C_1D_1 szakasz C_0D_0-lal párhuzamos. Az $A_0B_0C_0D_0$ négyszögből kiindulva C_1 et mint az A_0D_0 egyenes és a B_0-on átmenő, A_0C_0-lal párhuzamos egyenes metszéspontját kapjuk meg, hiszen ez az utóbbi az eredeti AC egyenes, A_0D_0 pedig a B-n átmenő, AD-vel párhuzamos egyenes. Hasonlóan D_1 a B_0C_0 és az A_0-on át B_0D_0-lal párhuzamosan húzott egyenes metszéspontja.

Ha a B_0C_0 és A_0D_0 egyenesek metszik egymást, jelöljük metszéspontjukat O-val és az A_0, B_0, C_0, D_0 pontoknak az O centrumra vonatkozó helyvektorát rendre $\mathbf{a}_0$-lal, $\mathbf{b}_0$-lal, $\mathbf{c}_0$-lal, $\mathbf{d}_0$-lal. Mivel $A_0B_0C_0D_0$ csúcsai között nincs három egy egyenesen, így O különbözik a négyszög csúcsaitól, és ezek a helyvektorok nem lehetnek 0-vektorok. Van tehát olyan λ és μ valós szám, hogy

$$\mathbf{d}_0 = \lambda\,\mathbf{a}_0 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{c}_0 = \mu\,\mathbf{b}_0.$$

Legyen C^* és D_1^* a

$$\mathbf{c}_1 = \frac{1}{\mu}\mathbf{a}_0 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{d}_1 = \frac{1}{\lambda}\mathbf{b}_0$$

helyvektorú pont, ekkor C_1^* rajta van az A_0D_0 egyenesen, és

$$\overrightarrow{B_0C_1^*} = \mathbf{c}_1 - \mathbf{b}_0 = \frac{1}{\mu}\,\mathbf{a}_0 - \mathbf{b}_0 = \frac{1}{\mu}\,(\mathbf{a}_0 - \mu\mathbf{b}_0) = \frac{1}{\mu}\overrightarrow{C_0A_0}$$

miatt $B_0C_1^*||A_0C_0$, tehát C_1^* azonos C_1-gyel, és hasonlóan D_1^* azonos D_1-gyel. (Ezzel azt is beláttuk, hogy ezek a pontok mindig létrejönnek, ha a csúcsok között nincs három egy egyenesen.) A bizonyítandó párhuzamosság ezek alapján a

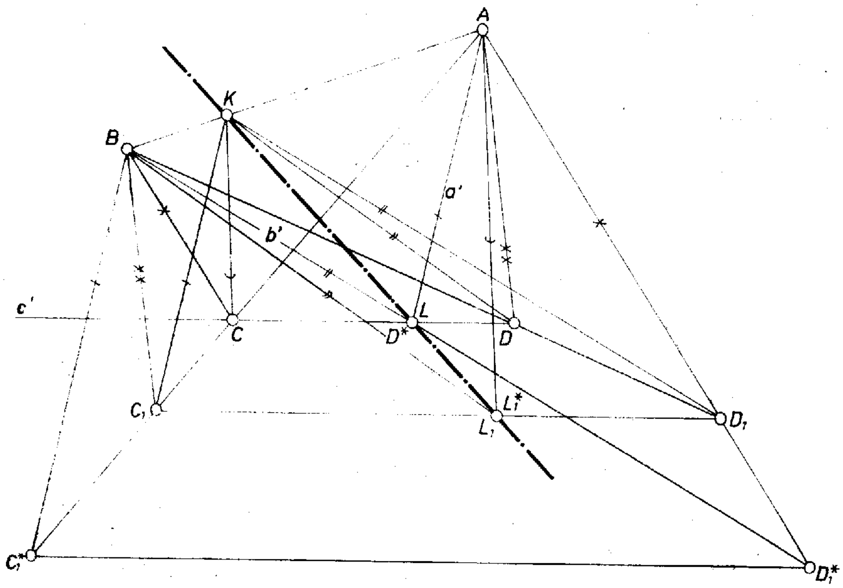
$$\overrightarrow{C_1D_1} = \mathbf{d}_1 - \mathbf{c}_1 = \frac{1}{\lambda}\,\mathbf{b}_0 - \frac{1}{\mu}\,\mathbf{a}_0 = \frac{1}{\lambda\mu}\,(\mu\mathbf{b}_0 - \lambda\,\mathbf{a}_0) = \overrightarrow{D_0C_0},$$

összefüggés következménye.

Ha B_0C_0 és A_0D_0 párhuzamosak, vagyis már eleve $BC||AD$, akkor C azonos C_1-gyel, D pedig D_1-gyel, és az állítás nyilvánvalóan igaz.

b) A feladat második állításának először a következő részét bizonyítjuk. Ha K az AB egyenes tetszőleges (A-tól és B-től különböző) pontja, akkor az A-n át KC_1-gyel és a B-n át KD_1-gyel párhuzamosan húzott a', ill. b' egyenes a $CD = c'$ egyenesen (L-ben) metszi egymást; mégpedig azzal, hogy az a', c' egyenesek metszéspontját B-vel összekötő egyenes párhuzamos KD_1-gyel, tehát azonos b'-vel.

Legyen a' és c' metszéspontja D^*, alkalmazzuk a feladat első részében bebizonyított tételt az $ABCD^*$ négyszögre, és jelöljük az így D_1, C_1 szerepét átvevő pontot D_1^*-gal, ill. C_1^*-gal (2. ábra, itt $ABCD$ konvex négyszög, és K az AB szakaszon van, ajánljuk az olvasónak, szerkessze újra az ábrát más helyzetű A, B, C, D, K pontrendszerek esetében).



1. ábra

Mivel négyszögünk első három szögpontja változatlan. azért L_1^* az AD_1 egyenesen van, C_1^* az AC-n és

$$D_1^*C_1^*||D^*C \equiv DC||D_1C_1.$$

S mivel szerkesztésnél fogva $C_1^*B||C_1K$, és a $D_1^*D_1$, $C_1^*C_1$, BK egyenesek A-ban metszik egymást. azért a $D_1^*C_1^*B$ és $D_1C_1K_1$ háromszögek egymás képei egy A-középpontú centrális hasonlóságban. Így pedig harmadik oldalaikra $D_1^*B \equiv D^*B||D_1K$, ezt akartuk bizonyítani.

K szerepére az AB egyenesnek csak egy pontja nem alkalmas, ti. az, ahol a C_1D_1 egyenes átmetszi, ha egyáltalán metszi; akkor L nem jön létre.

c) A második állítás L_1 pontjának a C_1D_1 egyenesre illeszkedése most már úgy adódik, hogy az L-re kapott eredményt alkalmazzuk az A, B, C_1, D_1 pontnégyesre és az AB egyenes tetszőleges K pontjára. (Az AB, CD egyenesek metszéspontja azonban nem szerepelhet K-ként.)

d) Rátérünk a második állítás hátra levő részének bizonyítására, ti. hogy K, L és L_1 egy egyenes pontjai. Alkalmazzuk az a) eredményt az A, B, C, D pont helyén rendre az A, K, C, L pontnégyesre és jelöljük L_1^*-gal azt a pontot, ahol az A-n át KC-vel párhuzamosan húzott egyenes metszi a KL egyenest. Ezek szerint L_1^* kapja a tételbeli D_1 szerepét, C_1 szerepét viszont maga C_1 játssza az új négyszögben is. Ekkor pedig

$$L_1^*C_1||LC \equiv DC||D_1C_1,$$

és a b) eredmény szerint L_1^* azonos L_1-gyel.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Sashegyi László (Tatabánya, Árpád Gimn.)