A XI. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát a Román Szocialista Köztársaság rendezte Bukarestben 1969. július 7–19. között. A versenyen 14 csapat vett részt 8–8 tanulóval: angol, belga, bolgár, csehszlovák, francia, holland, jugoszláv, lengyel, magyar, mongol, német (NDK), román, svéd és szovjet csapat. Július 10-én és 11-én írtak egy-egy dolgozatot, 3–3 feladatra 4–4 órai munkaidő állt rendelkezésre. A feladatok a következők voltak.

Első nap. 1. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan a természetes szám van, amely a következő tulajdonságú: bármilyen természetes számot jelöljön is n, a

$$z = n^4 + a$$

szám sohasem törzsszám.

2. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ jelentsenek valós állandókat, továbbá x jelentsen valós változót, végül legyen

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{\cos(a_2 + x)}{2} + \frac{\cos(a_3 + x)}{2^2} + \ldots + \frac{\cos(a_n + x)}{2^{n-1}}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x_1) = f(x_2) = 0$, akkor $x_2 - x_1 = m\pi$, ahol m egész szám.

3. Jelentse k az 1, 2, 3, 4, 5 számok bármelyikét. Állapítsuk meg k minden egyes értékére külön-külön annak szükséges és elegendő feltételét, hogy létezzék olyan tetraéder, amelynek k számú éle egyenként a egységnyi, a többi $(6-k)$ számú mindegyike pedig egy egységnyi hosszú, ahol $a > 0$.

Második nap. 4. Az AB szakasz mint átmérő fölé rajzoltuk a k félkört. Legyen C a k-nak A-tól és B-től különböző, tetszőleges pontja, D pedig a C-ből AB-re bocsátott merőleges talppontja. Tekintsük a következő három kört (k_1-et, k_2,-t és k_3-at), amelyeknek AB közös érintője: k_1 az ABC háromszögbe írt kör, míg k_2 és k_3 mindegyike érinti a CD szakaszt is, a k félkört is. Bizonyítsuk be, hogy k_1-nek, k_2-nek és k_3-nak van még egy közös érintője!

5. Adott a síkban n pont $(n > 4)$, közülük semelyik három nem esik egy egyenesbe. Bizonyítsuk be, hogy legalább $\binom{n-3}{2}$ olyan konvex négyszög van, amelyeknek csúcspontjai az adott pontok közül valók!

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1y_1 - z_1^2 > 0$ és $x_2y_2 - z_2^2 > 0$, akkor fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 - z_2)^2} \le \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2} \tag{1}$$

Állapítsuk meg annak szükséges és elegendő feltételét is, hogy mikor érvényes (1)-ben az egyenlőség jele!

Az egymás utáni feladatok teljes megoldásával rendre 5, 7, 7, 6, 7, 8 pontot szerezhettek a versenyzők. A 40–38 pontot elért versenyzők – szám szerint 3-an – I. díjban részesültek, a 37–30, ill. 29–24 pontot elértek II., ill. III. díjban, számuk 20, ill. 21 volt.

A magyar versenyzők közül I. díjban *Fiala Tibor* (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium érettségizett tanulója) részesült, 40 ponttal.

II díjat nyertek: *Bajmóczy Ervin* (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn. II. o. végzett) 31 ponttal, *Csirmaz László* (Budapest, I. István Gimn. érettségizett) 34 ponttal, *Michaletzky György* (Budapest, Piarista Gimn., érettségizett) 35 ponttal és *Ruzsa Imre* (Fazekas, II. o.) 37 ponttal. – III. díjat nyertek *Lempert László* (Budapest, ELTE Radnóti M. Gyak. Gimn., III. o.) 24 ponttal és *Pintz János* (Fazekas, érettségizett) 25 ponttal.

12 versenyző, köztük *Bajmóczy Ervin,* külön oklevélben részesült valamelyik feladat különösen szép megoldásáért.

Bár a verseny – az eddigi szokáshoz csatlakozva – egyéni volt, a külföldi folyóiratokban kialakult szokást követve, mi is közlünk összesítést az egyes csapatok teljesítményéről. Közöljük a csapatok tagjai által elért összpontszámokat és zárójelben az elért I., II. és III, díjak számát; a felsorolás rendje az államok magyar nevének alfabetikus sorrendje. Anglia 193 (1, 1, 1), Belgium 57 (0, 0, 0), Bulgária 189 (0, 0, 3), Csehszlovákia 170 (0, 0, 3), Franciaország 119 (0, 1, 0), Hollandia 51 (0, 0, 0), Jugoszlávia 181 (0, 2, 2), Lengyelország 119 (0, 1, 0), Magyarország 247 (1, 4, 2), Mongólia 120 (0, 0, 1), NDK 240 (0, 4, 4), Románia 219 (0, 4, 2), Svédország 104 (0, 0, 0), Szovjetunió 231 (1, 3, 3).