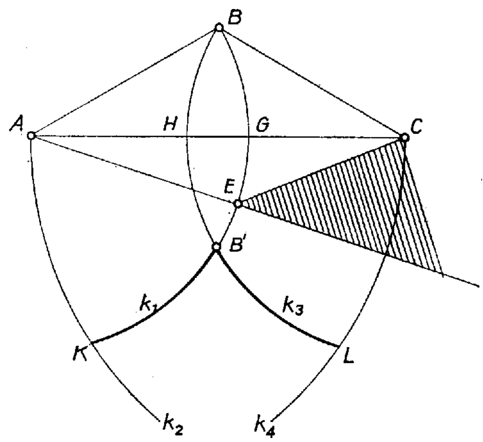
I. megoldás. Legyen az $ABCDE$ egyenlő oldalú konvex ötszög leghosszabb átlója AC. Az AC átló tetszőleges P pontjára az APB és BPC szögek összege $180°$, ezek a szögek tehát csak akkor lehetnek egyszerre $90°$-nál nem nagyobbak, ha mindketten $90°$-osak, azaz P azonos B-nek az AC-n levő F vetületével, ami egyben az AC átló felezőpontja is, hiszen az ABC háromszögben $AB = BC$.

Az ötszög E csúcsa az AC egyenes B-t nem tartalmazó oldalán van, és itt helyezkedik el (B-n kívül) minden további pont, amit megoldásunkban használni fogunk. E továbbá az A középpontú, B-n átmenő k_1 körön van, és $EC \leq AC$ miatt benne van a C középpontú, A-n átmenő k_2 körben. Emiatt E csak a k_1 kör kisebbik KG ívén lehet, ahol a K, G pontokat a k_2 kör, illetve az AC egyenes metszi ki a k_1 körből. Ugyanígy kapjuk, hogy D a C középpontú, B-n átmenő k_3 kör LH ívén van, ahol az L, H pontokat az A középpontú, C-n átmenő k_4 kör, illetve az AC egyenes metszi ki k_3-ból. Jelöljük B-nek F-re vonatkozó tükörképét B'-vel, a k_1, k_3 körök nyilván B'-n is átmennek (1. ábra).

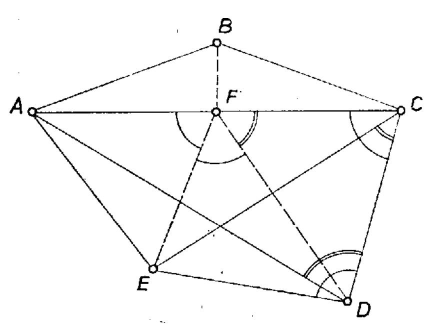


1. ábra

Nem lehet az E pont a k_1 kör $B'G$ ívén, hiszen az ötszög konvex volta miatt a D pontnak az AE egyenes C-t tartalmazó oldalán, és az EC egyenes A-t nem tartalmazó oldalán kell lennie, ebben a síkrészben viszont nincs az LH ívnek pontja, ha E a $B'G$ íven van. Tehát E a $B'K$ íven van, és ugyanígy kapjuk, hogy D a $B'L$ íven van. Emiatt az AFE szög nagyobb, mint az AFK szög, vagy ugyanakkora, és kisebb, mint az AFB' szög. Az AFK háromszögben $AK = AB > AF$, hiszen az ABF háromszög derékszögű, és AB. az átfogója. Emiatt az AFK háromszögben AK-val szemben nagyobb szög van, mint AF-fel szemben, e két szög összege viszont nagyobb $90°$-nál, hiszen FK-val szemben hegyesszög van (ez a szög ugyanis azonos az egyenlő szárú ACK háromszög AK alapján levő egyik szöggel). Tehát az AFK szög $45°$ és $90°$ közé esik és ugyanezt kapjuk a CFD szögre.

Azt kaptuk ezzel, hogy az F pontból az AE, CD oldalak $90°$-nál kisebb szögben látszanak, és e két látószög összege nagyobb $90°$-nál, így pedig a DE oldal is $90°$-nál kisebb szögben látszik F-ből. A feladat állítását ezzel bebizonyítottuk.

II. megoldás. Ismét azt bizonyítjuk be, hogy ha az $ABCDE$ ötszög legnagyobb átlója AC, akkor ennek felezőpontjából, F-ből a CD, DE, EA oldalak hegyesszögben látszanak. Mivel $AD \leq AC$, az ACD háromszögben $ADC\sphericalangle \geq ACD\sphericalangle$. A CDE háromszög C-nél levő szöge része az ACD szögnek, tehát kisebb annál, a háromszög D-nél levő szöge pedig tartalmazza az ACD szöget, tehát nagyobb annál. Így $DCE\sphericalangle < CDE\sphericalangle$, ezért $CE > DE = AE$, és így E az AC szakasz felező merőlegesének az A-t tartalmazó oldalán van, amiből következik, hogy az AFE szög hegyesszög. Ugyanígy láthatjuk be, hogy a CFD szög is hegyesszög (2. ábra).



2. ábra

Megmutatjuk, hogy a DEF háromszögben nem ED a legnagyobb oldal. Ha ugyanis $EF < ED = AE$ és $FD < ED = CD$ volna, akkor – a már látott $AF < AE$, $FC < CD$ miatt – a CFD, DFE, EFA háromszögek mindegyikében az F-fel szemközti oldal volna a legnagyobb, és így F-nél $60°$-osnál nagyobb szög volna. Mivel a három háromszög F-nél levő szögeinek az összege $180°$, ez valóban nem lehet. Tehát a DEF háromszögben nem DE a legnagyobb oldal, így nem F-nél van a legnagyobb szög, vagyis a DFE szög hegyesszög. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. Mindkét megoldásban AC-ről csak az $AC \geq EC$, $AC \geq AD$ egyenlőtlenségeket használtuk fel. Amint azt a II. megoldásban láttuk, a DFE szög mindig kisebb 90°-nál, bármilyen is az átlók nagysága.

2. Megoldásainkban feltételeztük, hogy B nincs az AC oldalon, ebből kaptuk az $AB > AF$ egyenlőtlenséget. Ha megengedjük, hogy egy konvex ötszög két egymáshoz csatlakozó oldala egy egyenesen legyen, feladatunk állítása ekkor is igaz, az általunk adott megoldások is elmondhatók, egy kicsivel több körültekintéssel.

3. Könnyen szerkeszthetünk olyan ötszöget, amilyen a feladatban szerepelt. Ha ugyanis egy hegyesszögű háromszögben a legkisebb oldal nem kisebb a legnagyobb oldal felénél, és a legkisebb oldal hosszával mint szárakkal, a másik két oldal fölé kifelé egyenlő szárú háromszöget rajzolunk, egyenlő oldalú konvex ötszöget kapunk.