Megjegyzés az 1224. gyakorlathoz[1]

Megmutatjuk, hogy a végzett műveletsorozat végén a szám elejére átírt számjegy csak 7-es lehetett.

Jelöljük Jóska eredetileg gondolt számát x-szel. Ebből a végzett szorzások, összeadások útján a következő számot képeztük:

$$y = 77 \cdot 33\big[23 \cdot 11(23x+1)+1\big]. \tag{1}$$

Jelöljük ennek utolsó számjegyét B-vel, az utolsó számjegy elhagyásával kapott számot A-val, azaz legyen

$$y = 10A + B.$$

Itt $B > 0$, hisz különben nem lehetne osztó, másrészt nyilván $B < 10$.

A végzett további műveletek alapján

$$10^{k-1} \cdot B + A = B(10A+B), \tag{2}$$

ahol k az y szám számjegyeinek száma. Átrendezéssel adódik

$$A = B \cdot \frac{10^{k-1}-B}{10B-1},$$

s ebből

$$y = 10A + B = B \cdot \frac{10^k - 1}{10B-1}. \tag{3}$$

Amennyiben tehát van megoldás, akkor y csak (3) alakú szám lehet. Ezt az értéket (1)-be visszahelyettesítve látható, hogy a

$$B \cdot \frac{10^k-1}{(10B-1)\cdot 7 \cdot 3 \cdot 11^2}$$

kifejezés egész szám. Mivel B nem osztható 11-gyel, azért $10^k - 1$ osztható 11^2-nel. Nézzük meg, hogy ez milyen k értékek mellett teljesül.

Mindenekelőtt megállapítjuk, hogy a 11-gyel való oszthatóság is csak akkor teljesül, ha k páros. Legyen ugyanis $k = 2n + m$, ahol $m = 0$, ha k páros és $m = 1$, ha páratlan, így

$$10^k - 1 = 10^m(10^{2n}-1) + 10^m - 1.$$

Itt $10^{2n} - 1$ osztható $10^2 - 1 = (10-1)(10+1)$-gyel, így valóban az oszthatósághoz szükséges és elégséges, hogy $m = 0$ legyen, és eszerint $k = 2n$.

Mármost ahhoz, hogy a 11^2-nel való oszthatóság is teljesüljön, a

$$\frac{(10^2)^n - 1}{10^2-1} = (10^2)^{n-1} + (10^2)^{n-2} + \ldots + (10^2) + 1 \tag{4}$$

hányadosnak is oszthatónak kell lennie 11-gyel. Nem nehéz belátni, hogy ez így alakítható:

$$\begin{aligned}\frac{(10^2)^n-1}{10^2-1} &= (10^2)^{n-2}\cdot(10^2-1) + 2\cdot(10^2)^{n-3}\cdot(10^2-1) + \\ &+3\cdot(10^2)^{n-4}\cdot(10^2-1) + \ldots + (n-1)\cdot(10^2)^0\cdot(10^2-1) + n.\end{aligned}$$

Mivel a jobb oldalon az utolsó tag kivételével minden tag osztható $10^2 - 1$-gyel, s így 11-gyel, szükséges és elégséges, hogy n osztható legyen 11-gyel, tehát $10^k - 1$ akkor és csak akkor osztható 11^2-nel, ha $k = 22\,r$ alakú.

Behelyettesítve ezt (3)-ba, (1) felhasználásával nyerjük, hogy a

$$\frac{\dfrac{B(10^{22r}-1)}{77\cdot 33(10B-1)} - 1}{23} \qquad \big[= 11(23x+1)\big] \tag{5}$$

kifejezés egész szám. Megjegyezzük, hogy $10^{22r} - 1$ mindig osztható 23-mal. Mivel $(10^{22})^r - 1$ osztható $10^{22} - 1$-gyel, elegendő az utóbbiról belátni, hogy osztható 23-mal. Mivel

$$10^{22} = 10^2 \cdot 10^4 \cdot 10^{16},$$

[1] Lásd a megoldást ezen számban, 214. o.

azért 23-mal osztva
10^2 maradéka: 8,
$10^4=(10^2)^2$ maradéka megegyezik $8^2=64$ maradékával, ami 18,
$10^8=(10^4)^2$ maradéka megegyezik $18^2=324$ maradékával, ami 2,
$10^{16}=(10^8)^2$ maradéka megegyezik 2^2 maradékával, ami 4 és így
10^{22} maradéka megegyezik $8\cdot 18\cdot 4$ maradékával, ami pedig 1. Tehát
10^{22}-t 23-mal osztva 1-et kapunk maradékul, így
$10^{22}-1$ valóban osztható 23-mal.

Ebből következik, hogy az (5) kifejezés csak akkor lehet egész, ha $10B-1$ osztható 23-mal; különben ugyanis a számlálóbeli tört kifejezés osztható maradna 23-mal, a második viszont nem osztható vele, tehát (5) nem lehetne egész. Mármost a számjegyeket sorra véve $10B-1$ csak $B=7$ esetén osztható 23-mal.

Ezt a gondolatmenetet végigjárva nincs szükség Pista ellesett adatára; ezt viszont gyakorlat-megoldóinktól nem kívánhattuk meg.

Megjegyezzük végül, hogy meggondolásunk jóval rövidebb lett volna az ún. Fermat-tétel felhasználásával.