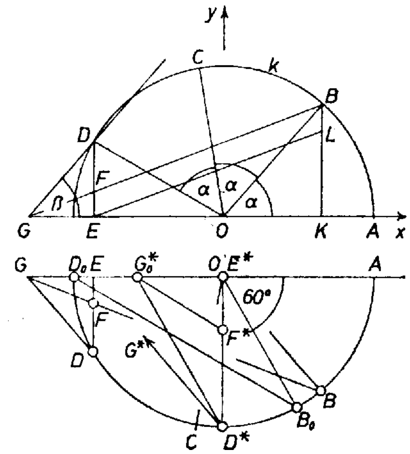
I. megoldás. A leírt alakzat szerkesztésében csak a G metszéspont létrejötte lehet kétséges. A mondott $\alpha < 60°$ (és a hallgatólagosan feltett $\alpha > 0°$, enélkül nem lehetne $\alpha \to 60°$) feltétel mellett, hosszúságegységnek OA-t véve

$$EF = \frac{1}{3}\sin 3\alpha = \sin\alpha - \frac{4}{3}\sin^3\alpha < \sin\alpha = BK,$$

ahol K a B pont vetülete OA-n (1. ábra felső része), tehát az AO és BF egyenesek nem párhuzamosak, G valóban létrejön, éspedig a KE félegyenes E-n túli részén.



1. ábra

Messe az E-n át BF-fel párhuzamosan húzott egyenes BK-t L-ben, és jelöljük az OGD szöget β-val. Mivel a szerkesztés szerint β mindig hegyesszög, elég a tangensét meghatározni:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{ED}{GE} = 3\frac{EF}{GE} = 3\frac{KL}{EK}.$$

Szerkesztésünk szerint

$$KL = KB - EF = \sin\alpha - \frac{1}{3}\sin 3\alpha, \qquad EK = \cos\alpha - \cos 3\alpha.$$

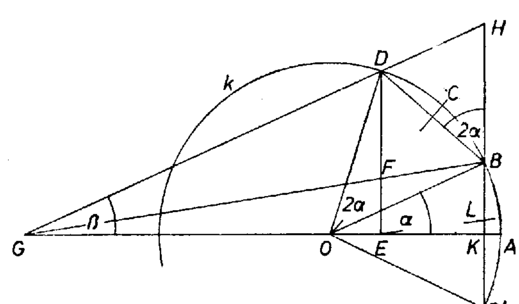
(Az utóbbi megállapításban arra a koordináta-rendszerre gondolunk, amelynek origója O, pozitív x tengelye az OA félegyenes: ebben K és E abszcisszája $\cos\alpha$, ill. $\cos 3\alpha$.) Ezek szerint

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\beta = 3\frac{\sin\alpha - \frac{1}{3}\sin 3\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha}.$$

A jobb oldalon álló függvény α-nak folytonos függvénye (ahol csak értelmezve van, vagyis mindenütt, ahol $\cos\alpha \neq 0$, ± 1). Tehát $\alpha \to 60°$ mellett a határértéke egyenlő az $\alpha = 60°$ melletti értékével, ez pedig $\sqrt{3}$.

A β szög tangense tehát tart a $60°$-os szög tangenséhez, ha $\alpha \to 60°$. Mivel $0 < x < 90°$ mellett a tangens függvény monoton növekedő, tetszőleges ε-hoz van olyan δ, hogy ha $|60° - x| < \varepsilon$-e, akkor $|\operatorname{tg} x - \sqrt{3}| < \delta$. Válasszuk α-t olyan közel a $60°$-hoz, hogy $|\operatorname{tg}\beta - \sqrt{3}| < \delta$ legyen, akkor $|60° - \beta| < \varepsilon$, tehát $\alpha \to 60°$ esetén $\beta \to 60°$.

II. megoldás. Legyen B vetülete AO-n K, tükörképe AO-ra B' és a GD és BB' egyenesek metszéspontja H (2. ábra).



2. ábra

Így $BK \parallel DE$, tehát $FE = DE/3$ alapján B a KH szakasz K-hoz közelebbi harmadoló pontja, és $BH = 2BK = BB' = BD$, hiszen a $BB'O$ és BDO egyenlő szárú háromszögek O-nál levő szöge 2α. Ezért egyrészt a BDH háromszög egyenlő szárú, másrészt B-nél levő DBB' külső szögét a BO egyenes felezi (a DBO szög is és a $B'BO$ szög is pótszöge α-nak), tehát BO párhuzamos a DH alappal. Ennélfogva B minden szóba jövő helyzetében $OGD\sphericalangle = AOB\sphericalangle = \alpha$, és ha $\alpha \to 60°$ akkor $OGD\sphericalangle \to 60°$.

Párkány Erzsébet (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)
Gurszky Zoltán (Vác, Sztáron S. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az $\alpha = \beta$ összefüggést (1) alapján is beláthattuk volna. Ez az összefüggés különben bizonyítható az 1322. gyakorlat[1], állítása alapján is, feladatunk ebből a gyakorlatból származik.

2. Ha $\alpha \to 60°$, akkor D pont tart a k kör A-val átellenes D_0 pontjához, és D-vel együtt D_0-hoz tartanak az E, F, G pontok is: a DEG háromszög oldalainak a hossza 0-hoz tart, e háromszög a D_0 pontra „zsugorodik össze”. (Tükörkép az 1. ábra alján.) Emiatt a kérdezett OGD szög is „elvész a szemünk elől”, határhelyzetét nem látjuk, mert a GD egyenest meghatározó 2 pont határhelyzete ugyanaz a D_0 pont.

Avégett, hogy ezt megakadályozzuk, rajzoljuk meg az $\alpha \to 60°$ értékekhez a DEG háromszöghöz hasonló $D^*E^*G^*$ háromszöget, melyben a D^*E^* szakasz hossza α-tól függetlenül egységnyi. Ha G tart D_0-hoz, a BG egyenes tart a B_0D_0 egyeneshez, ahol B_0 a B pont határhelyzete $\alpha \to 60°$ esetén, azaz $AOB_0\sphericalangle = 60°$. Mivel $AD_0B_0\sphericalangle = AOB_0\sphericalangle/2 = 30°$, az EGF szög határértéke $30°$, azaz rögzített E^*, D^* mellett a G^* olyan G_0^* ponthoz tart, melyre az $E^*F^*G_0^*$ háromszögben E^*-nál derékszög, G_0^*-nál $30°$-os szög van (F^* az E^*D^* szakasz E^*-hoz közelebbi harmadolópontja). Tehát az $E^*G_0^*D^*$ háromszög egy szabályos háromszög fele, $E^*G_0^*D^*\sphericalangle = 60°$.

Az elmondottakkal csupán szemléltetni kívántuk a feladat állítását, a fenti gondolatmenetben szereplő állításokat nem bizonyítottuk be, még azt sem mondtuk meg, mi ezeknek az állításoknak a pontos jelentése. Megjegyezzük azonban, hogy e vázlatos „bizonyítás” egzakttá tételének nincs akadálya, a határérték fogalma geometriai alakzatokra is kiterjeszthető.

[1] K. M. L. 42 42 (1971) 68. oldal.