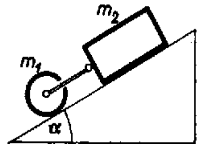
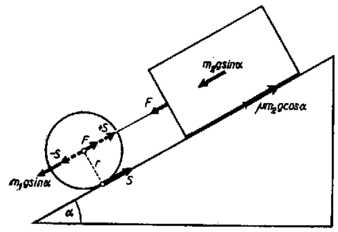
**1. feladat.** $30^\circ$*-os hajlásszögű lejtőn* $m_1 = 8$ kg *tömegű,* 10 cm *átmérőjű tömör henger tengelyéhez hozzá van kötve fonállal* $m_2 = 4$ kg *tömegű tégla.* (1. ábra.) *Mekkora gyorsulással mozognak? A súrlódási együttható a tégla és a lejtő között* $\mu = 0{,}2$. *A gördülő ellenállás és a csapágy súrlódása elhanyagolandó.*




*1. ábra*

**I. megoldás.** A henger alján $S$ súrlódási erő működik (2. ábra).




*2. ábra*

A fonál $F$ erővel húzza egymáshoz a hengert és a téglát. A henger középpontjában $m_1 g \sin\alpha$, a tégla középpontjában $m_2 g \sin\alpha$ mozgató erő, a tégla alján $\mu m_2 g \cos\alpha$ súrlódási erő működik (mert a tégla mozog). Az erők a rajz szerinti irányítások mellett pozitívok.

A tégla $a$ gyorsulású egyenletesen gyorsuló mozgással mozog; Newton II. törvénye szerint:

$$m_2 a = m_2 g \sin\alpha + F - \mu m_2 g \cos\alpha.$$

A henger középpontjában hozzáveszünk $\pm S$ erőt. A henger középpontjának haladó mozgására igaz:

$$m_1 a = m_1 g \sin\alpha - F - S.$$

Az $I$ tehetetlenségi nyomatékú henger $a/r$ szöggyorsulással mozog; ez a szöggyorsulás egyenlő a forgatónyomaték és a tehetetlenségi nyomaték hányadosával:

$$\frac{a}{r} = \frac{Sr}{I}.$$

Három egyenletünk egyenletrendszert alkot, amelyet $a$-ra, $S$-re, $F$-re megoldva ezt kapjuk:

$$a = g \cdot \frac{(m_1 + m_2)\sin\alpha - \mu m_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2 + I/r^2}, \tag{1}$$

$$S = \frac{I}{r^2} \cdot g \cdot \frac{(m_1 + m_2)\sin\alpha - \mu m_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2 + I/r^2} \tag{2}$$

$$F = m_2 g \cdot \frac{\mu(m_1 + I/r^2)\cos\alpha - I\sin\alpha/r^2}{m_1 + m_2 + I/r^2} \tag{3}$$

Ha homogén hengerről van szó, akkor $I = m_1 r^2/2$ és eredményeink:

$$a = \frac{(m_1 + m_2)\sin\alpha - \mu m_2 \cos\alpha}{1{,}5\, m_1 + m_2} \cdot g, \tag{1'}$$

$$S = \frac{m_1 g}{2} \cdot \frac{(m_1 + m_2)\sin\alpha - \mu m_2 \cos\alpha}{1{,}5\, m_1 + m_2} \tag{2'}$$

$$F = m_2 g \cdot \frac{(1{,}5\,\mu\cos\alpha - 0{,}5\sin\alpha)m_1}{1{,}5\, m_1 + m_2} \tag{3'}$$

A feladatban szereplő számadatokkal:

$$a = 0{,}3317 g = 3{,}252 \text{ m/s}^2, \tag{1''}$$

$$S = 1{,}327 \text{ kp} = 13{,}005 \text{ newton}, \tag{2''}$$

$$F = 0{,}020 \text{ kp} = 0{,}196 \text{ newton}. \tag{3''}$$

*Tomasz KREGLEWSKI* (Lengyelország)

**II. megoldás.** A szerkezet valamilyen $a$ gyorsulással mozog és $t$ idő alatt $at^2/2$ utat tesz meg a lejtő mentén. Ezalatt a helyzeti energia csökkenése: $(m_1+m_2)gat^2\sin\alpha/2$. A haladásból származó összes mozgási energia: $(m_1+m_2)(at)^2/2$, a forgásból származó mozgási energia: $I\omega^2/2 = Iv^2/2r^2 = I(at)^2/2r^2$ ($\omega$ a szögsebesség, $r\omega = v = at$ a kerületi sebesség). A súrlódási munka $\mu m_2 g\cos\alpha\,\dfrac{a}{2}\,t^2$. A mechanikai energiamegmaradás tétele szerint:

$$(m_1+m_2)g\cdot\frac{a}{2}\cdot t^2\sin\alpha = \frac{(m_1+m_2)}{2}\cdot a^2t^2 + \frac{I}{2r^2}\cdot a^2t^2 + \mu m_2 g\cos\alpha\cdot\frac{a}{2}\cdot t^2.$$

Ennek megoldása $a$-ra az (1) alatti eredményt adja.

*Mojmír SIMERSKÝ* (Csehszlovákia)

**Taglalás.** Vizsgáljuk meg, mikor indul el az összekötött szerkezet. Az elindulás feltétele, hogy $a > 0$ legyen. A határesetben (1) alapján:

$$(m_1+m_2)\sin\alpha_1 - \mu m_2\cos\alpha_1 = 0.$$

Innen az elindulás határesetének feltétele:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \mu\cdot\frac{m_2}{m_1+m_2}.$$

A mi esetünkben $\operatorname{tg}\alpha_1 = \mu/3 = 0{,}0667$, $\alpha_1 = 3{,}82°$. (Külön a hengernél $\alpha_1 = 0°$, külön a téglánál $\alpha_1 = \operatorname{arc\,tg}\mu = 11{,}31°$ lett volna az elindulás határhelyzete; a henger mintegy lehúzza a téglát.)

Az 1. feladatra mindeddig elmondottak csak akkor igazak, ha $F$ pozitív, mert negatív $F$ fonálerő nyomó igénybevételt jelentene, erre pedig a fonál nem képes. A határeset feltételét megkapjuk, ha $F$ (3) szerinti értékét 0-val tesszük egyenlővé:

$$\mu(m_1+I/r^2)\cos\alpha_2 - I\sin\alpha_2/r^2 = 0.$$

Innen a fonál feszességének feltétele:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \mu\left(1+\frac{m_1r^2}{I}\right); \tag{4}$$

hengernél:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = 3\mu, \tag{4'}$$

illetve számadatainkkal:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = 0{,}6, \quad \alpha_2 = 30{,}96°. \tag{4''}$$

Feladatunkban majdnem elértük ezt a szöget, ezért olyan kicsiny a fonálerő.

Előfordulhat, hogy a henger megcsúszik. Ennek feltétele, hogy $S$ elérje a lehetséges legnagyobb súrlódási erőt, $\mu m_1 g\cos\alpha_3$-at. (Feltesszük, hogy a hengerre és a téglára a csúszási súrlódási együttható azonos.) (2) alapján:

$$\frac{I}{r^2}\cdot g\cdot\frac{(m_1+m_2)\sin\alpha_3 - \mu m_2\cos\alpha_3}{m_1+m_2+I/r^2} = \mu m_1 g\cos\alpha_3.$$

Innen a határeset feltétele:

$$\operatorname{tg}\alpha_3 = \mu\left(1+\frac{m_1r^2}{I}\right).$$

Ez érdekes módon egyezik a fonálfeszesség (4) alatti feltételével, tehát $\alpha_2 = \alpha_3$. E szög túllépése után megszűnik a fonálerő és a két test egymástól függetlenül mozog: a tégla csúszik, a henger forog és csúszik. (Ha a fonalat súlytalan pálcával pótolnánk, ebben nem jönne létre erő.)

Ha a lejtő meredeksége $\alpha_2 = \alpha_3$-nál nagyobb, akkor a tégla és a henger középpontjának gyorsulása:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$

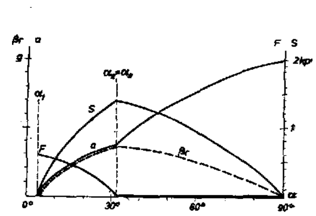
a henger alján működő súrlódási erő:

$$S = \mu m_1 g\cos\alpha,$$

a forgás szöggyorsulása $\beta$ és kerületi gyorsulása:

$$\beta r = \mu\frac{m_1r^2}{I}\cdot g\cos\alpha.$$

A 3. ábra mutatja a mozgás adatainak $\alpha$-tól való függését feladatunk számadatai mellett.




*3. ábra*

*TAKÁCS László* (Magyarország)

**2. feladat.** *Egyik pohárban* $300\,\mathrm{cm}^3$ $0\,°\mathrm{C}$ *hőmérsékletű toluol, egy másik pohárban* $110\,\mathrm{cm}^3$ $100\,°\mathrm{C}$ *hőmérsékletű toluol van. (Térfogatösszegük tehát* $410\,\mathrm{cm}^3$*.) Mennyi lesz az együttes térfogat, ha ezt a két folyadékot összeöntjük? A toluol köbös hőtágulási együtthatója* $0{,}001\,\mathrm{fok}^{-1}$*. Minden hőveszteségtől tekintsünk el.*

**Megoldás.** A 110 cm$^3$ 100°-os toluol térfogata 0°-on ($\beta$ hőkiterjedési együttható megadott számértékével visszaszámolva) 100 cm$^3$. Így a tömegek aránya 3 : 1 és a keverés utáni hőmérséklet 25 °C. A 400 cm$^3$ 0°-os toluolnak 25°-on 410 cm$^3$ térfogata van. Az összeöntés által nem változott az összes térfogat. Felmerül az a gyanú, hogy ez szükségképp van így, nem véletlenség. Vizsgáljuk meg.

Ugyanazon folyadékból az egyik résznek $t_1$ fokon $V_1$, a másik résznek $t_2$ fokon $V_2$ a térfogata. A 0°-ra visszaszámolt térfogatok: $V_{10} = V_1/(1+\beta t_1)$, $V_{20} = V_2/(1+\beta t_2)$. Ha 0°-on a sűrűség $d$, akkor a tömegek $m_1 = V_{10}d$ és $m_2 = V_{20}d$. Az összekeverés utáni hőmérséklet:

$$t = \frac{m_1t_1 + m_2t_2}{m_1 + m_2}.$$

Ezen a hőmérsékleten a térfogatok $V_{10}(1+\beta t)$ és $V_{20}(1+\beta t)$.

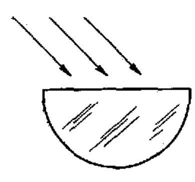
Számítsuk ki a térfogatösszeget:

$$\begin{aligned}
V_{10}(1+\beta t) + V_{20}(1+\beta t) &= V_{10} + V_{20} + \beta(V_{10}+V_{20})t = \\
&= V_{10} + V_{20} + \beta\cdot\frac{m_1+m_2}{d}\cdot\frac{m_1t_1+m_2t_2}{m_1+m_2} = \\
&= V_{10} + V_{20} + \beta(m_1t_1/d + m_2t_2/d) = V_{10} + \beta V_{10}t_1 + V_{20} + \beta V_{20}t_2 = \\
&= V_{10}(1+\beta t_1) + V_{20}(1+\beta t_2) = V_1 + V_2.
\end{aligned}$$

Tehát a térfogatösszegnek állandónak kell maradnia. Több pohár esetében is így van, hiszen összeönthetünk először kettőt, ehhez a harmadikat és így tovább.

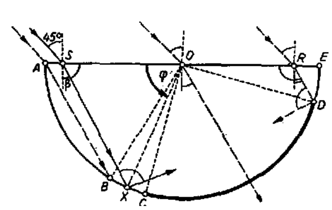
*Peter GEORGIEV* (Bulgária)

**3. feladat.** $\sqrt{2}$ *törésmutatójú üvegből fél henger készült. (4. ábra). Az üveg sík felületére* 45°*-os beesési szögben fénysugarakat bocsátunk. A fénysugarak a tengelyre merőleges metszet síkjában feküsznek. A henger palástjának mely részén lépnek ki fénysugarak?*



*4. ábra*

**Megoldás.** Jellemezzük a fénysugár helyzetét a $\varphi$ szöggel (5. ábra).




*5. ábra*

A töréstörvény alapján:

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin\beta} = \sqrt{2}, \qquad \sin\beta = \frac{1}{2}, \qquad \beta = 30^\circ.$$

A törési szög az üvegben haladó valamennyi megtört fénysugárra nézve $30^\circ$. (A törésmutató $n = \sqrt{2}$.)

Azonnal látjuk, hogy $\varphi = 60^\circ$ alatt geometriai okból nem érkezik fénysugár a hengerpalást belső felszínére.

A teljes visszaverődés határszöge $\beta_t$; erre nézve:

$$\sin\beta_t = \frac{1}{n} = \sqrt{2}, \qquad \beta_t = 45^\circ.$$

Minden fénysugár esetében $OSX\sphericalangle = 60^\circ$. A teljes visszaverődés esetében $SXO\sphericalangle > 45^\circ$, tehát $\varphi = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$ az az érték, ameddig a palástot $BC$ íven elérő fénysugarak teljesen visszaverődnek és nem lépnek ki. Amikor $\varphi$ nagyobb lesz $75^\circ$-nál, kilép fénysugár a hengerpaláston.

Tovább haladva újból elérjük a teljes visszaverődés határesetét, amikor $ODR\sphericalangle$ egyenlő lesz $45^\circ$-kal. $ORD\sphericalangle = 120^\circ$, így $ROD\sphericalangle = 180^\circ - 120^\circ - 45^\circ = 15^\circ$. Eszerint újból teljes visszaverődés kezdődik $\varphi = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$-tól felfelé.

A hengerpaláston akkor lép ki fénysugár, amikor:

$$75^\circ < \varphi < 165^\circ$$

A kilépő sugarak $CD$ ívéhez éppen $90^\circ$-os középponti szög tartozik.

Ki lehet mutatni, hogy a $BC$ és $DE$ ívhez tartozó, a paláston teljesen visszaverődő fénysugarak úgy érik el a felső sík lapot, hogy ott nem következik be teljes visszaverődés, tehát nem kell attól tartanunk, hogy ilyen teljesen visszaverődött sugarak valahol a hengerpalást egyéb részén kilépnek.

*Emil MATEJEV* (Bulgária)

**Kísérleti feladat.** *Minden résztvevő három lezárt dobozt kapott, két áramkivezetéssel. Megállapítandó a doboz felnyitása nélkül, hogy milyen áramköri elemek vannak a dobozban és ezek elektromos jellemzőit meg kell mérni. Rendelkezésre áll két „Univo" amper-voltmérő megadott mérési területekkel és belső ellenállásokkal, továbbá 10 voltos nagyságrendű egyenáramú, illetve 50-es frekvenciájú váltóáramú feszültségforrás. A műszerek egyenáramú mérés esetében* 2%*, váltóáramú mérés esetében* 3% *pontosságúak.*

**Megoldás.** „A mérés megkezdése előtt meggyőződtem arról, hogy az egyes dobozok kapcsain nem mérhető saját feszültség.

*I. doboz.* Ohm törvénye alapján megmértem az ellenállást egyenárammal (700 ohm $\pm 4\%$) és váltóárammal (2200 ohm $\pm 6\%$). Tehát a doboz sorba kapcsolt ellenállást és induktivitást tartalmaz. Ohmos ellenállása 700 ohm. Induktív ellenállása $\sqrt{2200^2 - 700^2} = 2070$ ohm $\pm 8\%$, eszerint önindukciója $L = 2070 : 314 = 6{,}6$ henry $\pm 8\%$.

*II. doboz.* Az egyenáramú és váltóáramú mérés a hibahatárokon belül 3700 ohmot adott, tehát igen valószínű, hogy ekkora ohmos ellenállás van a dobozban.

*III. doboz.* Az egyenáramú mérés 30 000 ohm ellenállást adott. Mivel a dobozzal párhuzamos kapcsolásban használtam kb. 30 000 ohm ellenállású voltmérőt, nyilvánvaló, hogy a doboz saját ohmos ellenállása ennél sokkal nagyobb, gyakorlatilag elhanyagolható.

A váltóáramú mérés 6600 ohm $\pm 6\%$ ellenállást adott. Tehát kondenzátorról van szó. Ennek kapacitása a 6600 ohm kapacitív ellenállásból számítva $C = 4{,}9\mu F \;\; \pm 6\%$."

*MIHÁLY László* (Magyarország)