## Az I. forduló feladatai

**1.** $m_1 = 0{,}2$ kg-*os vaslemezre vákuumban, hőszigetelő tartályban,* $h = 1$ m *magasból* $m_2 = 0{,}3$ kg-*os vörösrézgolyó esik. Az ütközés részben rugalmas. Az ütközés előtt a testek egyenlő hőmérsékletűek. Mennyivel emelkedik a hőmérséklet az ütközés folytán? A vas fajhője* 0,11 kcal/(kg–fok)*, a vörösréz fajhője* 0,092 kcal/(kg–fok).

*(Soós Károly)*

**Megoldás.** A vörösrézgolyó leesésekor 0,3 mkp munkát végez, az ebből származó hőmennyiség 0,3 mkp : 427 mkp/kcal = 0,000703 kcal. Ez melegíti fel a két fémtárgyat:

$$0{,}000703 = 0{,}11 \cdot 0{,}2 \cdot \Delta t + 0{,}092 \cdot 0{,}3 \cdot \Delta t.$$

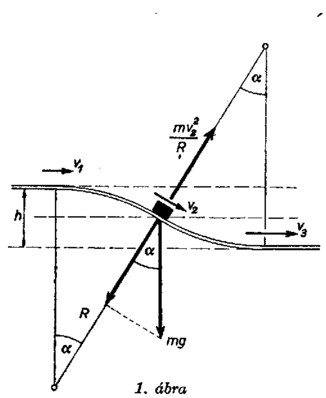
Innen a felmelegedés: $\Delta t = 0{,}0142$ °C.

Mivel az ütközés csak részben rugalmas, a vörösrézgolyó előbb–utóbb megáll és összes helyzeti energiája hővé lesz. A jó hővezetés folytán a fémek ugyanolyan hőfokúak lesznek. Mivel az esés légüres térben megy végbe, a levegő nem részesül súrlódás folytán (egyébként is elenyészően kevés) hőmennyiségben.

**2.** *Két vízszintes pályát két egyenlő,* $R = 5$ m *rádiuszú körívből álló lejtő köt össze. A vízszintes pályák és a körívek függőleges síkban vannak és törés nélkül csatlakoznak egymáshoz. A vízszintes pályák magasságkülönbsége* $h = 2$ m. *Egy test súrlódás nélküli csúszással halad a felső pályáról az alsóra. Mekkora az a legnagyobb kezdősebesség, amely mellett mozgása közben mindvégig érintkezésben marad a lejtővel?*

*(Wiedemann László)*

A lejtő tetején $v_1$, közepén $v_2$ és alján $v_3$ a sebesség (1. ábra).




*1. ábra*

Ezek között az energiamegmaradás törvénye ad kapcsolatot:

$$\frac{mgh}{2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad \frac{mgh}{2} = \frac{mv_3^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2},$$

vagyis

$$v_2^2 = v_1^2 + gh,$$

(1)

$$v_3^2 = v_2^2 + gh = v_1^2 + 2gh.$$

Tehát a három sebesség közül bármelyiket ismerve a másik kettő kiszámítható.

A test akkor hagyja el a lejtőt, ha az $mv^2/R$ centrifugális erő egyenlő lesz az $mg$ súly rádiusz irányába eső $mg\cos\alpha$ összetevőjével. Lerepülés csak a felülről nézve domború részen következhet be és ezen az előbbi állításunk szerint annál veszélyesebb a helyzet, minél lejjebb megyünk. A legveszélyesebb hely tehát a lejtők találkozási pontja, ezért erre nézve kell felírnunk a lejtőn maradás határesetének feltételét:

$$\frac{mv_2^2}{R} = mg\cos\alpha.$$

A rajzból látszik, hogy $\cos\alpha = (R - h/2) : R = 1 - h/2R$. Tehát $v_2$ számára a megengedett legnagyobb érték:

$$v_2 = \sqrt{gR(1 - h/2R)}.$$

(1) alapján átszámítva az a legnagyobb sebesség, amellyel a golyót fent nekiguríthatjuk a lejtőnek:

$$v_1 = \sqrt{gR(1 - 3h/2R)}$$

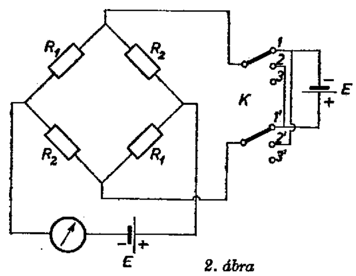
és az a legnagyobb sebesség, amellyel lenn megérkezhet:

$$v_3 = \sqrt{gR(1 + h/2R)}.$$

Feladatunk számadataival $v_1 = 4{,}43$ m/s, $v_2 = 6{,}26$ m/s, $v_3 = 7{,}67$ m/s.

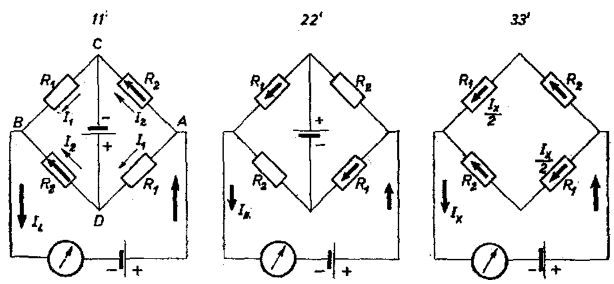
**3.** *A 2. ábrán látható áramkörben a K kettős kapcsoló 11′ állásnál* $I_{\mathrm{I}} = 6$ amper, *22′ állásnál* $I_{\mathrm{II}} = 3$ amper *áramerősséget mutat az ampermérő. Mennyit mutat az ampermérő a kapcsoló 33′ állásánál? A két telep E elektromotoros ereje egyenlő, belső ellenállásuk, valamint az ampermérő belső ellenállása elhanyagolható.*

*(Bodó Zalán)*




*2. ábra*

**Megoldás.** Rajzoljuk át a kapcsolást a három kapcsolóállás esetére (3. ábra).




*3. ábra*

Az 11′ esetben feltételezzük, hogy az ellenállásokon $I_1$ és $I_2$ áramok folynak. A feszültségesés $A$ és $B$ között:

$$E = R_2 I_2 + R_1 I_1.$$

A feszültségesés $D$ és $C$ között:

$$E = R_2 I_2 - R_1 I_1.$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: $I_1 = 0$, $I_2 = E/R_2$. Az $I_1 = I_2 = 6$ amper $A$-tól $C$-ig folyik, azután átmegy a belső elemen, majd $D$-től $B$-ig folyik. $R_1$ ellenállások árammentesek. Az $R_2$ nagysága:

$$R_2 = \frac{E}{I_1}. \tag{2}$$

Hasonlóan a 22′ kapcsolóállásban csak $R_1$ ellenállásokon folyik áram, $I_{\mathrm{II}} = E/R_1 = 3$ amper és

$$R_1 = \frac{E}{I_{\mathrm{II}}} \tag{3}$$

A 33′ kapcsolóállásban mindegyik ágban egyformán $I_x/2$ áram folyik. Felírva az egyik ágra Ohm törvényét, (2) és (3) felhasználásával:

$$\frac{I_x}{2} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{E}{E/I_{\mathrm{II}} + E/I_{\mathrm{I}}}.$$

Innen az ismeretlen áramerősség:

$$I_x = \frac{2 I_{\mathrm{I}} I_{\mathrm{II}}}{I_{\mathrm{I}} + I_{\mathrm{II}}}.$$

Ez az eredeti áramerősségek harmonikus középértéke; a mi esetünkben $I_x = 4$ amper.

### A II. forduló feladatai

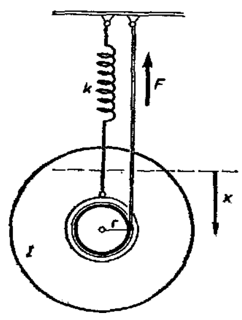
**1.** *Egy korong középpontján a korong síkjára merőlegesen vízszintes tengelyt vezetünk át, melyet a koronghoz rögzítünk. Azután a tengely két végére fonalat tekerünk, a fonalak végeit függőlegesen a mennyezethez erősítjük, miközben a korongot nyugalomban tartjuk. A koronghoz képest szimmetrikusan a tengelyre súrlódásmentes gyűrűkkel egy–egy rugót erősítünk. A rugók másik végeit függőlegesen a mennyezethez rögzítjük. Ebben a helyzetben a rugó nincs megfeszítve.*

*Most a rendszert magára hagyjuk. Mennyi idő múlva éri el a korong legmélyebb helyzetét?*

(Számadatok: a korong tömege $m = 2$ kg, tehetetlenségi nyomatéka a tengelyre vonatkozóan $I = 0{,}01$ kgm$^2$, a pálca rádiusza $r = 2$ cm, egy–egy rugó állandója $k = 1{,}5$ newton/m, $g = 10$ m/s$^2$.)

*(Wiedemann László)*

**Megoldás.** Egy bizonyos idő múlva a korong tengelye $x$ darabbal lejjebb kerül (4. ábra).




*4. ábra*

Ekkor a súlypont valamilyen $a$ gyorsulással halad lefelé és a két fonál együttesen $F$ rugalmas erővel húz felfelé. A haladó mozgást gyorsító erőt megkapjuk, ha a súlyból levonjuk a rugók és a fonalak felfelé húzó erejét:

$$ma = mg - 2kx - F. \tag{4}$$

A korong forgásának $a/r$ szöggyorsulását megadja a fonálerő forgatónyomatékának és a tehetetlenségi nyomatéknak a hányadosa:

$$\frac{a}{r} = \frac{Fr}{I}. \tag{5}$$

Két egyenletből álló egyenletrendszerünket megoldva megkapjuk a gyorsulást és a fonálerőt, mint $x$ út függvényét:

$$a = \frac{g}{1 + I/mr^2} - \frac{2k/m}{1 + I/mr^2} \cdot x,$$
$$F = \frac{I}{mr^2 + I} \cdot mg - \frac{I}{mr^2 + I} \cdot 2k \cdot x,$$

A gyorsulásnak az úttól való függését tanulmányozva észrevesszük, hogy olyan rezgő mozgásról van szó, amely szélső helyzetéből indul. Az az $x_0$ távolság, amelynél a rezgés egyensúlyi helyzete áll be, az $a = 0$ állításból következően $x_0 = mg/2k$. A középpont rezgő mozgásának $T_0$ rezgésideje a rezgő mozgás gyorsulástörvényéből következően:

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{2k/m}{1 + I/mr^2},$$

innen

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{1 + I/mr^2}{2k/m}}. \tag{6}$$

Ennek negyedrésze, $T_0/4$ az az idő, amely alatt a pörgő kerék az $x_0$ mélységet eléri.

Az $x_0$-nál mélyebbre süllyedve megváltozik a mozgás jellege, ugyanis most megváltozik $F$ fonálerő előjele. De a fonál nem adhat át tolóerőt. A (4) egyenletből el kell hagyni $F$-et és innen kezdve egyszerűen egy rugóra akasztott tömeg le–fel rezgőséről van szó. Igaz, hogy a rezgő tömeg egy változatlan szögsebességgel pörgő korong, amely legombolyítja szüntelenül a fonalat a tengelyről, amennyiben a fonál elég hosszú. Ennek a mozgásnak a rezgésideje (6)-ból $I$ elhagyásával:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

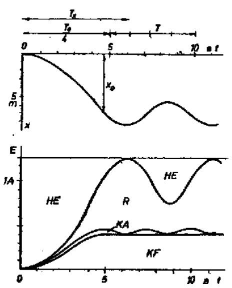
Ennek negyedrészét hozzáadva $T_0/4$-hez kapjuk a legmélyebb helyzet elérésének idejét:

$$T_x = \frac{T_0}{4} + \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1+I/mr^2}{2k/m}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}},$$

Számadatainkkal $T_x = 4{,}71\,\mathrm{s} + 1{,}28\,\mathrm{s} = 5{,}99\,\mathrm{s}$. A középhelyzet mélysége $x_0 = 6{,}67$ m, az ezután bekövetkező további süllyedés:

$$\frac{mg}{2k}\cdot\sqrt{\frac{mr^2}{I+mr^2}} = 1{,}81 \text{ méter}$$

így a korong legnagyobb mélysége $6{,}67\,\mathrm{m} + 1{,}81\,\mathrm{m} = 8{,}48\,\mathrm{m}$.



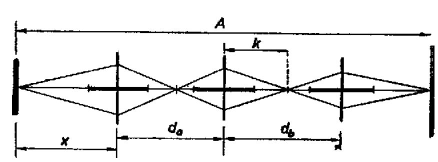

*5. ábra*

Az 5. ábra felső része a korong mélységét mutatja, mint az idő függvényét. Az ábra alsó részén a mechanikai energiák alakulását látjuk $A = m^2g^2/2k = 133$ joule egységekben kifejezve. Induláskor csak helyzeti energia van **(HE)**. Lepörgéskor ebből a forgó mozgás kinetikus energiája **(KF)**, a haladó mozgás kinetikus energiája **(KH)** és a rugóban felraktározott rugalmas energia **(R)** lesz. $T_0/4$ után **(KF)** változatlanul megmarad és az energia többi részén osztoznak **(HE)**, **(KH)** és **(R)**.

2. *Három egyforma, $f$ fókusztávolságú lencsénk van. Ezeket $d_a$ és $d_b$ távolságokban elhelyezve lencserendszert állítunk össze. Ezzel a lencserendszerrel egy tárgyról a tőle $A$ távolságban levő ernyőn képet állítunk elő. Lencserendszerünket az optikai tengely mentén ide–oda tolva a képalkotás változatlanul éles marad. Az adatok milyen értékei mellett lehetséges ez?*

*(Bodó Zalán)*

**Megoldás.** Lencserendszerünket úgy helyezzük el, hogy az első lencse a tárgytól $x$ távolságnyira legyen (6. ábra).




*6. ábra*

A tárgyról az első lencse a leképezési törvény alapján $xf/(x-f)$ távolságban ad éles képet, amely a második lencsétől $d_a - xf/(x-f)$ távolságban van. Ismét a lencsetörvénnyel az első lencse által adott képről a második lencse tőle $k$ távolságnyira ad képet:

$$k = \frac{f\big[d_a - xf/(x-f)\big]}{d_a - f - xf/(x-f)}. \tag{7}$$

Ennek a távolsága a harmadik lencsétől $d_b - k$ és a harmadik lencse által adott kép képtávolsága $(d_b-k)f/(d_b-f-k)$. A tárgy és kép $A$ távolságát megkapjuk, ha ezt, $x$-et és $d_a + d_b$-t összeadjuk:

$$A = x + d_a + d_b + \frac{(d_b-k)f}{d_b-f-k}.$$

Itt $k$ helyett felhasználandó a (7) szerinti kifejezés. Azonos átalakítások után:

$$A = d_a + d_b + \frac{\big[d_ad_b - 2(d_a+d_b)f + 3f^2\big]x^2 + f^2(d_a-d_b)x + f^2\big[(d_a+d_b)f - d_ad_b\big]}{\big[d_ad_b - 2(d_a+d_b)f + 3f^2\big]x + f\big[d_af - (d_a-f)(d_b-f)\big]}. \tag{8}$$

A feladat kívánságának akkor tettünk eleget, ha $A$ ezen értéke független $x$-től. Ez akkor következik be, ha $x$ együtthatói nullák. Először is a számlálóban $x$ együtthatójának kell 0-nak lennie:

$$f^2(d_a - d_b) = 0.$$

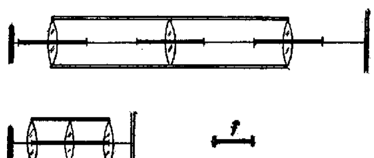
Ebből következően $d_a = d_b = d$. Tehát a lencsék közötti távolságoknak egyenlőknek kell lennie. Ezt (8)-ban felhasználva:

$$A = 2d + \frac{[d^2 - 4fd + 3f^2]x^2 + f^2d[2f - d]}{[d^2 - 4fd + 3f^2]x + f[-f^2 + 3df - d^2]}. \tag{9}$$

$x^2$, illetve $x$ együtthatóját is nullával tesszük egyenlővé:

$$d^2 - 4fd + 3f^2 = 0$$

Ennek az egyenletnek a megoldásai: $d_{\mathrm{I}} = 3f$, $d_{\mathrm{II}} = f$. Ezeket (9)-ben felhasználva $A_{\mathrm{I}} = 9f$, $A_{\mathrm{II}} = 3f$. Tehát két megoldás van (7. ábra).




*7. ábra*

Az egyik esetben a lencsék távolsága a fókusztávolság 3-szorosa és a tárgy–kép távolság a fókusztávolság 9-szerese. A másik esetben a lencsék távolsága fókusz–távolságnyi és a tárgy–kép távolság a fókusztávolság 3-szorosa. A lencse-rendszer mindegyik esetben teleszkopikus: belépő párhuzamos sugárnyaláb mint párhuzamos nyaláb távozik. A tárgy és a kép mindegyik esetben azonos nagyságú, az első esetben egyenes, a másodikban fordított állású.

**3.** *Két U feszültségű feszültségforrást sorbakapcsolunk és szintén U feszültségű feszültségforrást kapunk. Lehetséges-e ez?*

*(Nagy Elemér)*

**Megoldás.** Két váltakozó feszültségről van szó, amelyek amplitúdója egyenlő, de 120°-os fáziskülönbségben vannak egymáshoz képest. Kísérletileg megoldható, ha két egyforma transzformátor primer oldalait a háromfázisú hálózat két különböző fázisára kapcsoljuk és a szekunder oldalakat sorba kapcsoljuk. Ekkor mindegy, hogy a szekunder oldalon egy vagy két transzformátorról vesszük-e le a feszültséget.

**Az 1968. évi tulkai tanulmányi verseny eredménye:**

**I. díj:** *Marossy Ferenc* (Budapest, Fazekas M. g. IV. o. t.).
**II. díj:** *Takács László* (Sopron, Széchenyi g. IV. o. t.).
**III. díj:** *Andor László* (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.).

A további helyezettek: 4. *Nagy Zsigmond* (Budapest, Kaffka M. g. IV. o. t.), 5. *Woynarovich Ferenc* (Budapest, Piarista g. IV. o. t.), 6. *Járai Antal* (Debreoen, Vegyipari techn. IV. o. t.), 7. *Várhelyi Ferenc* (Budapest, Fazekas M. g. IV. o. t.), 8. *D. Tóth Balázs* (Debrecen, Kossuth g. IV. o. t.), 9. *Gratzl Miklós* (Pannonhalma, Bencés g. IV. o. t.), 10. *Diósi Lajos* (Budapest, Apáczai Csere g. IV. o. t.).