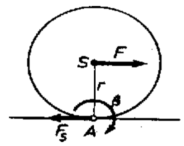
A csúszásmentes gördülés dinamikai elemzése

Azzal az esettel foglalkozunk, melynek során a gördülő ellenállás elhanyagolható. Az előzőek értelmében a pillanatnyi forgástengely a gördülő testnek a felülettel érintkező alkotója, mely a testhez és a felülethez képest is időben változtatja helyzetét. Mivel a mozgás a pillanatnyi forgástengelyek körüli elemi forgásokból tevődik össze, ezért a pillanatnyi forgástengelyre bármely pillanatban az $M = \Theta \cdot \beta$ alapösszefüggés érvényes.



1. ábra

Hasson F vízszintes erő a súlypontban (más esetekben értelemszerűen kell eljárni), ekkor az 1. ábra szerint

$$F \cdot r = \Theta_A \cdot \beta,$$

ahol Θ_A a testnek a pillanatnyi forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka. Ha ismerjük a testnek súlyponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát, akkor a vele párhuzamos, r távolságban levő tengelyre a tehetetlenségi nyomatékot Steiner tétele adja:

$$\Theta_A = \Theta_S + m \cdot r^2$$

Behelyettesítéssel és $\beta \cdot t = a_s$ figyelembe vételével[1]

$$F = \frac{\Theta_s \cdot \beta}{r} + m \cdot a_s$$

adódik. Tudjuk azonban azt, hogy nem pontszerű test esetén a testre ható erők eredője a test súlypontjának gyorsulását határozza meg. Jelenleg az mg gravitációs erő és az F_n alátámasztási erő eredője zérus, mert az összes többi szereplő erő vízszintes és a gyorsulás is vízszintes. Ezért ezek az erők a gyorsulás szempontjából figyelmen kívül hagyhatók. Így a dinamika alapegyenlete:

$$F - F_s = m \cdot a_s.$$

Az előző képlettel összehasonlítva a tiszta gördüléshez szükséges súrlódási erő

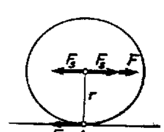
$$F_s = \frac{\Theta_s \cdot \beta}{r} = \Theta_s \cdot \frac{a_s}{r^2}.$$

Annál nagyobb súrlódási erőre van szükség, minél nagyobb gyorsulást akarunk a testen létrehozni. Ezt a súrlódási erőt vagy a nyugalmi súrlódás, vagy határesetben a tapadási súrlódás biztosítja, az $F_s \leq \mu_0 \cdot m \cdot g$ összefüggés alapján adott gyorsulás esetén

$$\mu_0 > \frac{\Theta_s \cdot a_s}{m \cdot g \cdot r^2}$$

kell, hogy legyen. Az utóbbi egyenlőtlenség jobb oldalán levő érték* hengernél $\frac{1}{2} a_s/g$, gömbnél $\frac{2}{5} a_s/g$, abroncsnál a_s/g.

A vizsgált gördülést dinamikailag másképp is felfoghatjuk, ennek érdekében redukáljuk az. erőket a súlypontba (2. ábra).



2. ábra

Hasson még a testre a súlypontban egy F_s és egy $-F_s$ erő (ezzel az erők eredőjét nem változtattuk meg). Rendezzük az erőket ezután egy a súlypontban ható $F - F_s$ eredővé, melyről tudjuk, hogy a súlypont gyorsulását határozza meg, és egy $M = F_s \cdot r$ forgatónyomatékú erőpárrá, melynek nyomatéka bármely tengelyre, tehát a súlyponton átmenő

[1] A következőkben is a csillaggal jelölt számításokat az olvasónak célszerű elvégeznie.

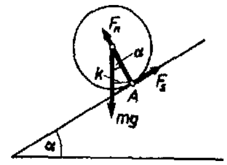
tengelyre is állandó. Ez a nyomaték állandó szöggyorsulást hoz létre. Az egyenletek, melyeknek egyidejűleg fenn kell állniuk, a következők

$$F - F_s = m \cdot a_s,$$
$$F_s \cdot r = \Theta_s \cdot \beta$$

Tehát a mozgás felfogható úgy, mint a súlypont egyenletesen gyorsuló haladó mozgása és a súlyponton átmenő tengely körüli egyenletesen gyorsuló forgómozgás. Ugyanúgy, mint ahogy sebességek esetében tettük, itt is látható*, hogy β ugyanakkora, mint a pillanatnyi forgástengely körüli szöggyorsulás, azaz a csúszásmentes gördülést jelenleg a $v_s = r \cdot \omega$ összefüggés helyett az a $a_s = r \cdot \beta$ kinematikai egyenlettel tudjuk figyelembe venni. Az így nyert egyenletek természetesen az előző megoldás összefüggéseivel egyenértékűek, bármely meghatározásra váró mennyiségre ugyanezt az eredményt adják.*

Hogy a kétféle gondolkodás alkalmazásában gyakorlatra tegyünk szert, vizsgáljuk meg az α hajlásszögű lejtőn legördülő gömb esetét ($\Theta_s = (2/5) \cdot m \cdot r_2$).

1. A pillanatnyi forgástengely körül a test forgómozgást végez (3. ábra).



3. ábra

Ebben az esetben

$$M_A = m \cdot g \cdot r \cdot \sin\alpha;$$
$$\Theta_A = (2/5) \cdot m \cdot r^2 + m \cdot r^2 = (7/5) \cdot m \cdot r^2,$$

így a szöggyorsulás

$$\beta = \frac{M_A}{\Theta_A} = \frac{5g\sin\alpha}{7r}.$$

A súlypont gyorsulása

$$a_s = \beta \cdot r = (5/7) \cdot g \cdot \sin\alpha.$$

Az egyenletekben természetesen sem F_s, sem F_n nem szerepel, mivel ezek az erők A-n mennek keresztül, így nyomatékuk A-ra zérus. Ha a súrlódási erőt is ki akarjuk számítani, akkor a súlypont mozgására felírt mozgásegyenletet is fel kell használnunk. Mivel a súlypont gyorsulása, tehát a testre ható összes erő eredője és a súrlódási erő is lejtő irányú, ezért az mg gravitációs erő és az F_n alátámasztási erő eredője is lejtőirányú kell, hogy legyen. A jól ismert számolás alapján* ez az eredő $mg \cdot \sin\alpha$ nagyságú, és a lejtőn lefelé mutat. Ugyanakkor $F_n = mg\cos\alpha$. Így a súlypont mozgására

$$mg \cdot \sin\alpha - F_s = m \cdot (5/7)g \cdot \sin\alpha,$$

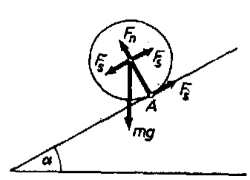
azaz

$$F_s = (2/7) \cdot m \cdot g \cdot \sin\alpha.$$

A csúszásmentes gördülés feltétele

$$\mu_0 \geq F_s/F_n = (2/7)\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

2. A súlypont gyorsuló mozgásához a súlyponton átmenő tengely körüli egyenletesen gyorsuló forgómozgás járul hozzá (4. ábra).



4. ábra

A dinamika alaptörvényének egyenletei komponensenként (lejtőirányban és arra merőlegesen) az erőredukció után.

$$m \cdot g \cdot \sin\alpha - F_s = m \cdot a_s,$$
$$F_n - m \cdot g \cdot \cos\alpha = 0.$$

A forgómozgás alapegyenlete:

$$F_s \cdot r = (2/5) \cdot m \cdot r^2 \cdot \beta,$$

és a csúszásmentességet biztosító kinematikai egyenlet

$$a_s = \beta \cdot r.$$

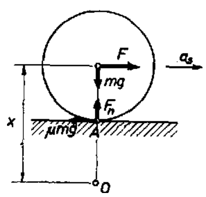
Ezekből az egyenletekből a mozgás az előbbivel egyenértékűen vizsgálható.*

Gördülés csúszással

Nem tiszta gördülés jön létre például az 1. ábra esetében, ha

$$\mu_0 < \frac{\Theta_s \cdot a_s}{mg \cdot r^2}.$$

Ekkor a test csúszni fog, s a csúszási súrlódás $F_s = \mu mg$ értékét adottnak kell vennünk (μ a csúszási súrlódási együttható). Mivel most a testre ható összes erőt ismerjük (5. ábra), a súlypont gyorsulását meg akarjuk határozni.



5. ábra

Az

$$F - \mu mg = m \cdot a_s$$

egyenletből:

$$a_s = \frac{F}{m} - \mu g.$$

A forgatónyomaték erőredukcióval $M = \mu \cdot m \cdot g \cdot r$, tehát a szöggyorsulás

$$\beta = \frac{\mu \cdot mg \cdot r}{\Theta_s}.$$

β és a_s ismeretében a pillanatnyi forgástengely helyét a súlyponttól az

$$x = \frac{a_s}{\beta} = \frac{F/m - \mu g}{\frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot r}{\Theta_s}}$$

összefüggés adja meg. Mivel $F > \mu \cdot m \cdot g$, azért $x > 0$, vagyis a pillanatnyi forgástengely a súlypont alatt van. Ha a

$$\mu < \mu_0 < \frac{\Theta_s \cdot a_s}{m \cdot g \cdot r^2}$$

összefüggést felhasználjuk, x-ről könnyű bebizonyítani* az $x > r$ egyenlőtlenséget, vagyis a pillanatnyi forgástengely a testen kívül helyezkedik el.

A pillanatnyi forgástengelyt másképp is megkereshetjük. Ha ez a súlyponttól x távolságra van, mivel a tengely körül pillanatnyi forgás történik, akkor

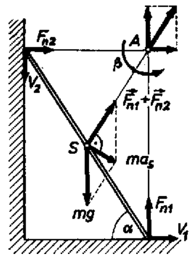
$$Fx - F_s(x - r) = (\Theta_s + mx^2)\beta.$$

A szöggyorsulás előbbi $\beta = \mu mgr/\Theta_s$ értékével x-re a már megismert összefüggés adódik.*

Erőtani elemzés pillanatnyi forgástengely esetén

Egy dolgot az eddigiek szerint is világosan kell látnunk. A pillanatnyi forgástengely körüli elemi forgás esetén nem érvényes a forgómozgások dinamikájának az a tétele, hogy „tiszta” forgómozgás esetén a testre ható erők eredője zérus, azaz a testre ható erők erőpárt alkotnak. Ez csak akkor áll fenn, ha a pillanatnyi forgástengely a gyorsuló mozgást nem végző súlyponton megy keresztül. A legutóbbi pillanatnyi forgástengely keresés esetén például F és F_s eredője sohasem lehet zérus (5. ábra).

A pillanatnyi forgástengely ismeretében bármely helyzetben (tehát nem az idő függvényében) elemi módszerekkel meg tudjuk határozni a súlypont gyorsulását.



6. ábra

A fal mellett súrlódásmentesen lecsúszó rudat vizsgálva újra, a 6. ábra szerint F_{n1} és F_{n2} átmegy a pillanatnyi forgástengelyen, ezért forgatónyomatékuk egyenként zérus. A gravitációs erő nyomatéka és a tehetetlenségi nyomaték:

$$M = mg \cdot (l/2) \cos \alpha,$$

$$\Theta_A = \Theta_s + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} m l^2 + m \frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} m l^2.$$

A szöggyorsulás

$$\beta = \frac{M}{\Theta_A} = \frac{3g \cos \alpha}{2l},$$

ezzel a súlypont gyorsulása

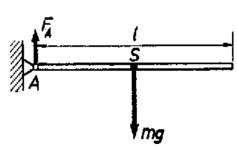
$$a_s = \beta \frac{l}{2} = \frac{3g \cdot \cos \alpha}{4l}.$$

A testre ható három erő eredője $m \cdot a_s$, és mivel mg a súlypontban hat, kell, hogy F_{n1} és F_{n2} eredője is a súlyponton menjen keresztül. Ezért az adott helyzetben F_{n1} és is F_{n2} meghatározható*, s ezzel a dinamikai tárgyalás teljes.

Dinamikai jellemzés kijelölt forgástengely esetén

Vizsgáljuk meg a dinamikai tárgyalást olyan esetben, amikor kijelölt forgástengely van, de az nem megy át a súlyponton.

A vízszintesen elengedett rúd egyik végén átmenő, a rúdra merőleges tengely körül billenhet le. Határozzuk meg a súlypont gyorsulását és a tengelynek a testre gyakorolt kényszererejét a rúd egy adott helyzetében.



7. ábra

Az egyszerűség érdekében tekintsük először a rúd vízszintes helyzetét (7. ábra).

A szöggyorsulás

$$\beta = \frac{M_A}{\Theta_A} = \frac{3g}{2l},$$

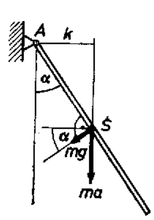
a súlypont gyorsulása

$$a_s = \frac{l}{2} \beta = \frac{3}{4} g.$$

A testre ható erők eredője Newton II. törvényéből

$$mg - F_A = m a_s,$$

amiből $F_A = \dfrac{mg}{4}$ adódik. Ha tehát az elengedés előtt a test a másik végen is alá volt támasztva, az F_A kényszererő az elengedés pillanatában az $mg/2$ értékről felére csökken. Ezt az erőcsökkenést mindenki érezheti, akinek társa egy gerenda másik végét elengedi.



8. ábra

Egy tetszőleges, a függőlegessel α szöget bezáró helyzetben (8. ábra)

$$M_A = mg \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin\alpha.$$

A szöggyorsulás

$$\beta = \frac{M_A}{\Theta_A} = \frac{3 \cdot g \cdot \sin\alpha}{2l},$$

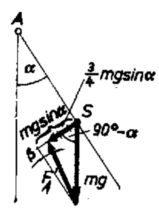
és a súlypont érintőirányú (tangenciális) gyorsulása:

$$a_s = \frac{\beta \cdot l}{2} = \frac{3}{4} g \sin\alpha.$$

A testre ható erők eredője, mely az érintőirányú gyorsulást létrehozza

$$F = m \cdot a_s = \frac{3}{4} mg \sin\alpha,$$

mely erő a vízszintessel a szöget zár be. Az mg és $m \cdot a_s$ ismeretében az F eredőkhöz hozzájáruló F'_A kényszererő meghatározható. Ha ehhez hozzávesszük még azt az erőt, mely az A pontban hat és iránya a súlyponton megy keresztül, amely erő a pillanatnyi centripetális gyorsulást biztosítja (látni fogjuk, hogy a súlypont sebességét a helyzet függvényében szintén ki tudjuk számítani elemi módszerekkel), akkor a centripetális erő és F'_A eredője a kívánt F_A csaperőt adja.

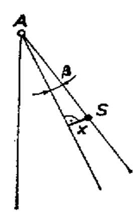


9. ábra

A 9. ábra szerint*

$$F'_A = \frac{mg}{4}\sqrt{1 + 15\cos^2\alpha}.$$

Az egész problémát természetesen úgy is meg lehet oldani, hogy az erőket a súlypontba redukáljuk (hasonlóan a 4. ábrához). Ekkor belátható, hogy $F'_A x$ forgatónyomatékú erőpár a súlypont körül éppen az előbbi szöggyorsulást hozza létre (x az F'_A hatásvonalának a súlyponttól való távolsága).



10. ábra

Az ábra szerint a β-val jelzett szögre* $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha$, továbbá a 10. ábra szerint*

$$x = \frac{l}{2}\sin\beta = \frac{l}{2}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{16 + \operatorname{tg}^2\alpha}},$$

ezzel a kérdéses erőpár nyomatéka

$$M_s = F'_A \cdot x.$$

Ebből és a $\beta = M_s/\Theta_s$, egyenletből

$$\beta = \frac{3g \cdot \sin\alpha}{2l}$$

adódik.* Innen a feladat további elemzése már ismert.

A feladat világosan mutatja és összefoglalóul ezt kell hangsúlyoznunk, hogy ha a forgómozgás alapegyenletét a forgástengelyre írjuk fel, megkapjuk a szöggyorsulást és ebből a súlypont gyorsulását. A testre ható összes erő hatását azonban csak a súlypont mozgására vonatkozó dinamikai alapegyenlet adja meg. A másik lehetőség az, hogy az erőket a súlypontba redukálva felírjuk a dinamika alapegyenletét és a súlyponton átmenő tengelyre a forgómozgás alapegyenletét. Ekkor a_s és β között kapcsolatot az teremt, hogy van a testnek egy olyan pontja (ill. egyenese) – ez a forgástengely – melynek gyorsulása zéró.