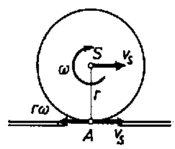
Kinematikai jellemzés

Testek gördülését szokás úgy tárgyalni, mint a súlypont haladó mozgásának és a súlyponton átmenő tengely körüli forgásnak együttes fellépését. Többek között ennek a szemléletnek a jogosságát vizsgáljuk mind kinematikai és dinamikai szempontból, mind egyszerűbb esetek energetikai elemzésével. Közben néhány olyan ismeretet is szerzünk, mely egyéb feladatok megoldása szempontjából is fontos. A szövegben csillaggal jelöltük meg azokra a számolásokra való utalásokat, melyeket szeretnénk, ha az olvasó saját maga végezne el.

Csak síkbeli eseteket vizsgálunk, ami azt jelenti, hogy a test bármely pontjának sebessége merőleges a forgástengelyre. Eszerint például gördülő henger esetén elegendő valamely, a henger tengelyére merőleges sík pontjainak kinematikai viszonyait vizsgálnunk.

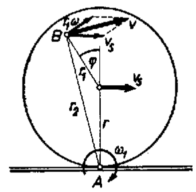
A pillanatnyi forgástengely

Egy test csúszásmentes gördülése azt jelenti, hogy egy adott felülettel, például egy síkkal érintkező pontjainak (az 1. ábrán A pont) a felülethez viszonyított sebessége zérus. Henger esetén ezek a pontok a rajz síkjára merőleges alkotót adnak. Általában mindazon pontok által alkotott egyenest, melyeknek pillanatnyi sebessége zérus, pillanatnyi forgástengelynek nevezzük. A pillanatnyi forgástengely lehet a testen belül és a testen kívül is. A következőkben a pillanatnyi forgástengelynek a dinamikai és az energetikai elemzésnél is döntő szerepe lesz.



1. ábra

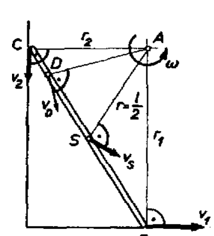
Az 1. ábrán látható csúszásmentes gördülést a következőképp állíthatjuk elő. Adjunk a testnek v_s vízszintes sebességet, és ugyanakkor a v_s sebességre merőlegesen álló szimmetriatengelye körül forgassuk meg akkora szögsebességgel, hogy az A pontnak a haladó mozgásból származó v_s és a forgómozgásból származó $r \cdot \omega$ kerületi sebessége egyenlő nagyságú és ellentétes irányú legyen. Ekkor az A pont sebessége a vektori (jelenleg algebrai) összegezés folytán zérus és így betöltheti a pillanatnyi forgástengely szerepét. Eszerint a csúszásmentes gördülés feltétele: $v_s = r \cdot \omega$.



2. ábra

A gondolatmenetből kitűnik, hogyan kell bármely pont pillanatnyi sebességét meghatározni. Legyen a gördülő test egy pontja a 2. ábrán jelölt B pont, melynek a szimmetriatengelytől való távolsága r_1. Pillanatnyi sebességét az ábrán látható szerkesztés adja. Ugyanakkor a pont sebessége úgy is meghatározható, mint a pillanatnyi forgástengely körüli r_2 sugárral történő forgás kerületi sebessége. A kérdés csupán az, hogy mekkora a pillanatnyi forgástengely körüli forgás szögsebessége. Legyen ez ω_1. A 2. ábra trigonometriai összefüggéseinek elemzésével általánosságban bizonyítható$*$, hogy $\omega_1 = \omega$. Mint egyszerű esetet, vizsgáljuk meg a súlypont mozgását, melynek ismerjük v_s sebességét. Ha ezt a pillanatnyi forgástengely körüli forgásból származtatjuk, akkor $v_s = r \cdot \omega_1$. Az előzőleg megállapított összefüggéssel összevetve $\omega = \omega_1$.

Mielőtt ezen problémák taglalásában továbbhaladnánk, vizsgáljuk meg konkrét példán, hogyan kell a pillanatnyi forgástengely helyzetét és a szögsebességet megállapítani. A 3. ábrán látható rúd fal mellett csúszik le.



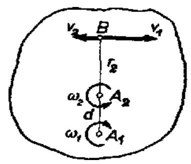
3. ábra

Bármely adott pillanatban ismerjük két végpontja sebességének irányát. Ha ezeket a sebességeket forgásból származtatjuk, akkor a pillanatnyi forgástengelyt a sebességekre merőleges egyeneseken kell keresnünk, mégpedig azok metszéspontján megy át (A pont), s a szögsebesség előjelét egyértelműen meghatározza egy pont sebességének értelme. Egy tetszőleges D pont sebességének iránya ás értelme ebből már adódik. A szögsebesség nagyságát kinematikai viszonyokból akkor tudjuk meghatározni, ha ismerjük a test valamely pontja sebességének nagyságát is. Ha például a B pont sebessége v_1, akkor $\omega = v_1/r_1$. Az ω ismeretében a geometriai viszonyokból bármely pont sebességének nagysága is adódik, például a súlypont sebessége:

$$v_s = \omega \cdot r = \frac{v_1}{r_1} \cdot \frac{l}{2}.$$

Párhuzamos tengelyű forgások összetétele

Vizsgáljuk meg, milyen jelentést adhatunk annak az esetnek, amikor egy testen két párhuzamos forgástengelyt jelölünk ki ω_1 és ω_2 szögsebességekkel (4. ábra).



4. ábra

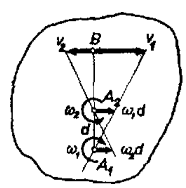
Legyen a két tengely távolsága d. Ha az egyszerűség kedvéért a tengelyek síkjában levő B pont sebességét megvizsgáljuk, mely a kijelölt tengelytől r_1 és r_2 távolságra van, akkor e pont mindkét forgásból származóan is sebességgel rendelkezik, s tényleges sebessége ezen sebességek eredője.

$$v_B = v_1 - v_2 = r_1\omega_1 - r_2\omega_2.$$

Ezt az összefüggést az $r_2 = r_1 - d$ kapcsolat felhasználásával a további két alakban is felírhatjuk*:

$$v_B = r_1(\omega_1 - \omega_2) + \omega_2 d,$$
$$v_B = r_2(\omega_1 - \omega_2) + \omega_1 d.$$

Mivel r_1 és r_2 változó lehet attól függően, hogy a test mely pontjának sebességét vizsgáljuk, ugyanakkor bármely pont esetén $\omega_1 \cdot d$ és $\omega_2 \cdot d$ adott, ezért mindkét összefüggés mutatja, hogy olyan mozgás jön létre, mely egy $\omega_1 - \omega_2$ szögsebességű forgás és egy haladó mozgás összetétele.



5. ábra

A haladó mozgást megadó rész éppen annak a tengelynek a sebessége, melyre az $\omega_1 - \omega_2$ szögsebességű forgást vonatkoztatjuk. Például az $r_1(\omega_1 - \omega_2)$ az A_1 tengely körüli forgásból származó kerületi sebesség és $\omega_2 \cdot d$ az A_1 pontnak az A_2 tengely körüli forgásból származó kerületi sebessége. Az előzőek szerint ebben az esetben is létezik pillanatnyi forgástengely, melynek pillanatnyi sebessége 0, ezért B pont sebessége e tengely körüli forgásból

$$v_B = r(\omega_1 - \omega_2)$$

összefüggéssel számítható, ahol r a pillanatnyi forgástengelynek a B ponttól való távolsága. A számítást elvégezve* (a v_B-re kapott két értéket összehasonlítva) az adódik, hogy a pillanatnyi forgástengely az A_1 ponttól

$$r - r_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \cdot d,$$

az A_2 ponttól

$$r - r_2 = \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} \cdot d \qquad \text{távolságra van.}$$

A feltételezés szerint (más esetekben értelemszerűen kell eljárni) $\omega_1 > 0$ és $\omega_2 > 0$ (mert előjelesen vettük figyelembe), továbbá $\omega_1 > \omega_2$, ezért az

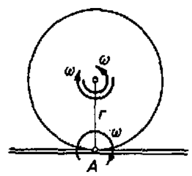
$$\frac{r - r_1}{r - r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

összefüggés felhasználásával megállapítható*, hogy $r > r_1 > r_2$. Ez nem is lehet másképp, mert az A_2 sebessége az A_1 körüli forgásból $\omega_1 \cdot d$, továbbá A_2 és A_1 sebessége egyező értelmű. Ezért a pillanatnyi forgástengely jelenleg az A_1 és A_2 pontokat összekötő szakaszon kívül, A_1 oldalán van, mégpedig ott, mely pontra az előző összefüggés értelmében $\omega_1 x = \omega_2(d + x)$. Itt x a pillanatnyi forgástengelynek az A_1-től való távolsága ($x = r - r_1$; $\quad d + x = r - r_2$).

A forgástengely-redukció

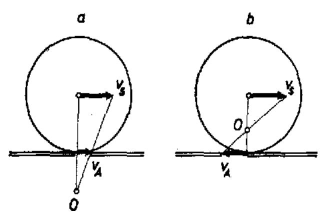
A testek gördülése szempontjából bennünket különösen az az eset érdekel, amikor $|\omega_1| = |\omega_2| = \omega$, de a szögsebességek ellentétes előjelűek. Ekkor az eddigi egyenletek így módosulnak: $v_B = \omega \cdot d$ (bármely B pontra), x pedig nem véges* (szokásos szóhasználat szerint a pillanatnyi forgástengely a végtelenben van). Az így előadódó esetet forgáspárnak nevezzük, és bármely pontra jelentését egy $\omega \cdot d$ nagyságú, a két tengely síkjára merőleges irányú haladó sebesség adja meg.

A forgáspár módot ad arra, hogy úgynevezett forgástengely-redukciót hajtsunk végre, mely tiszta gördülés esetén a következő. Legyen a pillanatnyi forgástengely az A pontban, és a szögsebesség ω. Adjunk a mozgáshoz a súlyponti tengelyen átmenő $+\omega$ és $-\omega$ szögsebességű forgásokat, ezzel a test mozgásának hű leírását nem változtatjuk meg, mert e két forgásból bármely pont eredő sebessége 0 (6. ábra).



6. ábra

Az így előálló, most már három forgást egy forgáspárrá és egy súlyponti tengely körüli forgássá összevonva a forgáspárból $v_s = \omega \cdot r$ sebesség adódik, s bármely pont sebességét ezen haladó és a súlyponti tengelyen átmenő ω szögsebességből származó kerületi sebesség eredője adja. Visszajutottunk ezzel a gördülésre tett megállapításainkhoz.



7. ábra

Ha nem tiszta gördülés esete áll fenn, hanem a testnek nyugvó felülettel érintkező pontja is sebességgel rendelkezik, akkor a sebesség irányától függően a $7a$ ábra szerint a pillanatnyi forgástengelyt a felület oldalán, a $7b$ ábra szerint a test oldalán kell keresnünk. Járművek kerekeinél mindkét eset előfordul.