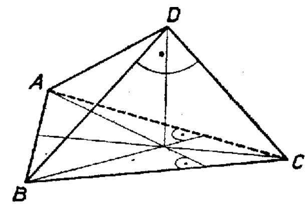
Az 1694. feladatban bebizonyítottuk,[1] hogy ha egy tetraéder egyik csúcsának a szemben levő lap síkján levő merőleges vetülete egybeesik annak a lapháromszögnek a magasságpontjával, akkor ez a tulajdonsága a tetraéder mindegyik csúcsának megvan.



Mostani feladatunk második feltevése szerint a D csúcsnak megvan a mondott tulajdonsága, ezért az A csúcsnak is; tehát A merőleges vetülete a BCD lap S síkján a D csúcs, hiszen az első föltevés szerint a BCD lap D-nél derékszögű háromszög, és így magasságpontja maga D. Ezek szerint AD merőleges S-re, és így ennek DB, DC egyeneseire is, tehát az ADB és az ADC háromszög is derékszögű, a tetraéder D-ből induló élei páronként merőlegesek egymásra.

Tetraéderünk származtatható egy téglatestből, elmetszve ezt a D csúcsában összefutó 3 él A, B, C végpontjaival meghatározott síkkal.

Alakítsuk az állítás jobb és bal oldalának K különbségét így:

$$\begin{aligned} K &= 3(AD^2+BD^2)+3(BD^2+CD^2)+3(AD^2+CD^2)-(AB+BC+CA)^2=\\ &=3(AB^2+BC^2+CA^2)-(AB^2+BC^2+CA^2)-2(AB\cdot BC+BC\cdot CA+\\ &+CA\cdot AB)=(AB-BC)^2+(BC-CA)^2+(CA-AB)^2. \end{aligned} \tag{2}$$

(Az első alak kéttagú kifejezéseit Pitagorasz tétele alapján helyettesítettük a megfelelő átfogó négyzetével, az utolsó alak tagjait pedig alkalmas csoportosítás alapján írtuk fel.)

(2) szerint K nem lehet negatív, tehát az állítás helyes. (1)-ben akkor és csak akkor érvényes az egyenlőségi jel, ha $K=0$, azaz (2) mindhárom tagja külön is 0, vagyis ha $AB=BC=CA$, a tetraéder ABC lapja szabályos háromszög, többi 3 lapja egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszög. A fent említett származtatás szerint kockából kiindulva kapunk ilyen tetraédert.

Engedi Antal (Makó, József A. Gimn. IV. o. t.)

[1] K. M. L. 41 (1970) 118. o.