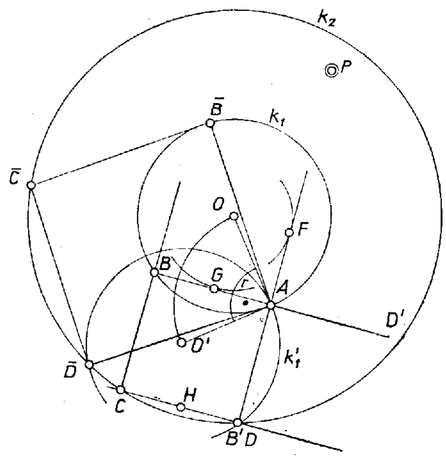
Legyen a két kör k_1 és k_2, közös középpontjuk O, sugaruk rendre r_1, r_2, és $r_1 < r_2$. Ha a követelmények szerinti négyzetet O körül forgatjuk, csúcsai rajta maradnak k_1-en, ill. k_2-n, ellenben az adott P pontról a rajta átmenő oldalegyenes „lelép”, de elegendő nagy elfordítás után esetleg egy másik oldalegyenes söpör át P-n. Ez adja azt az ötletet, hogy a P-re vonatkozó követelménytől egyelőre eltekintve olyan $ABCD = N$ segédnégyzetet szerkesszünk, melynek csúcsai a két körön vannak. Ekkor ugyanis csak az lesz már hátra, hogy N-et O körül forgatva, a forgatást abban a helyzetben állítsuk meg, amelyben N valamelyik oldala éppen áthalad P-n; az ehhez szükséges α forgatási szöget próbálgatás nélkül úgy kapjuk, hogy P-t az O körül ráforgatjuk N valamelyik oldalára, ekkor α nagysága (abszolút értéke) egyenlő ezzel a szöggel, iránya pedig vele ellentétes (1. ábra, lásd a 124. oldalon).



1. ábra

2. Megmutatjuk, hogy az N csúcsaira fennálló követelmény csak úgy teljesülhet, ha k_1-en N egyik oldalának végpontjai vannak rajta, k_2-n pedig a szemben fekvő oldal végpontjai. (Ugyanis a közbeszédi szokás szerint úgy értelmezzük a követelményt, hogy k_1-en is, k_2-n is kell lennie N valahány csúcsának.) Nem lehet ugyanis N-nek 3 csúcsa az egyik körön, mert minden négyzet húrsokszög, és bármelyik 3 csúcsán átmenő kör átmegy a negyedik (az összes többi) csúcson, így pedig egy csúcs sem lenne a másik körön. Továbbá az sem lehet, hogy mindegyik körön egyik-egyik átló végpontjai legyenek rajta. Ha ugyanis a k_1-en levő csúcsok A, C, és így B, D a k_2-n vannak, akkor O rajta lenne AC felező merőlegesén is, BD-én is, tehát csak a négyzet középpontja lehetne, ebből pedig az következnék, hogy k_2 azonos k_1 gyel. N csúcsainak a két körre más elosztása nem lehetséges, állításunkat bebizonyítottuk.

3. Legyen tehát a pozitív körüljárású $ABCD = N$-nek A, B csúcsa k_1-en, C, D pedig k_2-n és fordítsuk el ábránkat A körül $+90°$-kal. Ekkor B a D-be jut, és legyen O, k_1 új helyzete O', k_1'. Mivel k_1 átmegy B-n, azért k_1' átmegy D-n, vagyis D a k_2-nek és k_1'-nek közös pontja, és miután A-t a k_1-en tetszés szerint megválasztottuk, O', k_1' és D megszerkeszthető. D-t $-90°$-kal elfordítva kapjuk B-t (k_1-en), C pedig a D-nek tükörképe az AB szakasz f felező merőlegesére. Így $AB = AD$ és $DAB\sphericalangle = 90°$, végül C négyzetté egészíti ki a DAB háromszöget és rajta van k_2-n, hiszen f a k_2-nek is szimmetriatengelye.

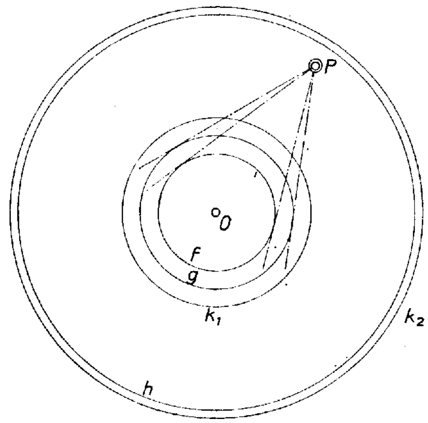
A D pont – és vele a négyzet – akkor és csak akkor jön létre, ha k_1'-nek és k_2-nek van közös pontja. Ennek föltétele, mivel centrálisuk hossza $r_1\sqrt{2}$, a következő:

$$r_2 - r_1 \leqq r_1\sqrt{2} \leqq r_2 + r_1,$$

amiből a jobb oldali egyenlőtlenség $r_2 > r_1$ alapján mindig teljesül. A baloldaliból pedig a két sugár arányára

$$1 < \frac{r_2}{r_1} \leq 1 + \sqrt{2}.$$

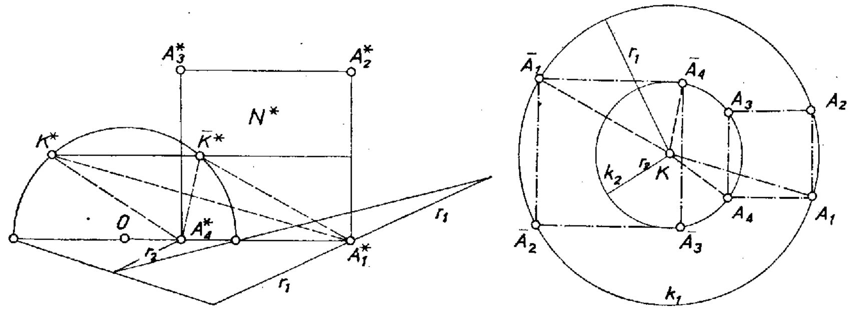
4. Visszatérve a P ponttal kapcsolatos követelményre, N forgatása közben oldalegyeneseinek O-tól való távolsága nem változik, így az oldalegyenesek érintenek egy-egy kört (AD és BC ugyanazt a kört). P-n azok az oldalegyenesek söpörnek át, amelyekhez tartozó körhöz lehet P-ből érintőt húzni – éppen ezek az érintők az oldalegyenes megfelelő helyzetei –, vagyis amelynek sugara kisebb az $OP = d$ távolságnál. Egy $ABCD$ segédnégyzet 3 ilyen köréhez P-ből legföljebb 6 érintő húzható, így – amennyiben 2 segédnégyzetet kapunk –, N megfelelő helyzeteinek száma legföljebb 12 (2. ábra).



2. ábra

Adott r_1, r_2 esetében a mondott körök sugarai ki is számíthatók és összehasonlíthatók d-vel. A számítást az olvasóra hagyjuk.

Megjegyzés. A fenti megoldásbeli közbülső eredményhez – amelyben a négyzetnek két szomszédos csúcsa a k_1 en, a másik kettő pedig a k_2-n van –, eljuthatunk a „feladat megfordításának módszeré”-vel és hasonlósági transzformációval. Egy tetszőleges $A_1^*A_2^*A_3^*A_4^* = N^*$ négyzet $A_1^*A_2^*$ oldalának felező merőlegesén megszerkesztjük azokat a K^* pontokat, amelyekre $K^*A_1^* : K^*A_4^* = r_1 : r_2$ (Apollóniosz-körrel, a metszéspontok száma 2, 1 vagy 0), majd O-ból $K^*A_i^*$-vel (i=1, 2, 3, 4) párhuzamosan húzott félegyenesekkel kimetsszük k_1-ből A_1-et és A_2-t, k_2-ből A_3-at és A_4 et, ekkor a segédnégyzet $A_1A_2A_3A_4$. (Két lépésben: N^*-ot nagyítjuk $r_1 : K^*A_1$ arányban és K^* képét O-ba toljuk.) A szerkesztést a megoldásbeli elfordítással fejezzük be (3. ábra).



3. ábra