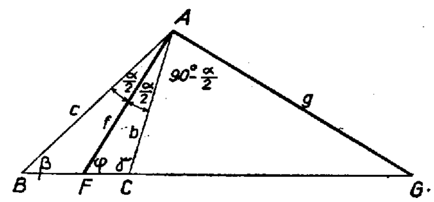
I. megoldás. I. Legyen a háromszög a szokásos jelöléssel ABC, a szögfelezők $f = AF$, $g = AG$, és válasszuk úgy a betűzést, hogy $AB > AC$ legyen (hiszen g véges volta miatt $AB \neq AC$), így pontjaink sorrendje a BC egyenesen B, F, C, G.



A belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra, így az FGA derékszögű háromszögből meghatározható az $AFG = AFC = \varphi$ szög, így pedig háromszögünk szögei:

$$\beta = \varphi - \frac{\alpha}{2}, \qquad \gamma = 180^\circ - \left(\varphi + \frac{\alpha}{2}\right). \tag{1}$$

Ezekkel a sinustétel alapján, előbb az ABF, ACF háromszögből az addíciótételt is felhasználva

$$c = AB = f\frac{\sin(180^\circ - \varphi)}{\sin\left(\varphi - \dfrac{\alpha}{2}\right)} = \frac{f \cdot FG\sin\varphi}{FG\sin\varphi\cos\dfrac{\alpha}{2} - FG\cos\varphi\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{fg}{g\cos\dfrac{\alpha}{2} - f\sin\dfrac{\alpha}{2}}, \tag{2}$$

ugyanígy

$$b = AC = f\frac{\sin\varphi}{\sin\gamma} = \frac{fg}{g\cos\dfrac{\alpha}{2} + f\sin\dfrac{\alpha}{2}}, \tag{3}$$

végül a keresett háromszögből

$$a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{fg\sqrt{f^2+g^2}\sin\alpha}{g^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - f^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}. \tag{4}$$

Ezzel megadtuk az oldalaknak az adatokkal való kifejezéseit.

A számítás valódi háromszöget ad, ha c nevezője pozitív (mert akkor a nevezője is pozitív):

$$g\cos\frac{\alpha}{2} - f\sin\frac{\alpha}{2} > 0,$$

amiből

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < \frac{g}{f} = \operatorname{tg}\varphi, \quad \frac{\alpha}{2} < \varphi,$$

hiszen f, g pozitívok, másrészt $\alpha/2$ és φ hegyesszögek.

Ugyanerre a feltételre vezet a háromszög szerkesztő megoldása, az AB félegyenes B pontjának az FG szakasz F-en túli meghosszabbításán kell lennie, evégett az FAB szögnek kisebbnek kell lennie az AFG szög A-beli váltószögénél.

II. A számadatokkal $\varphi = 66^\circ 5'$, $\beta = 51^\circ 5'$, $\gamma = 98^\circ 55'$, $b = 98{,}08$, $c = 124{,}5$, $a = 63{,}03$ egység. (A numerikus számítás egyszerűbb $\operatorname{tg}\varphi = g/f$-ből φ, β és γ kiszámításával, mint (2)–(4) alapján.)

Garay András (Sopron, Széchenyi I. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Területi meggondolásokkal vezetjük le a fenti kifejezéseket. Az FGA derékszögű háromszög területe egyenlő az ACF és ACG háromszögek területének összegével is és az ABG és ABF területének különbségével is. Mindegyik terület 2-szeresét két oldal és a bezárt szög sinusa szorzataként írva

$$bf\sin\frac{\alpha}{2} + bg\cos\frac{\alpha}{2} = fg, \qquad cg\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) - cf\sin\frac{\alpha}{2} = fg,$$

ahonnan kiemeléssel, osztással (3)-ra, ill. (2)-re jutunk.

Másrészt az FGA háromszög A-ból induló magassága közös az ABC háromszögével, így területeik aránya egyenlő alapjaik arányával

$$\frac{a}{\sqrt{f^2+g^2}} = \frac{bc\sin\alpha}{fg},$$

ahová b, c kifejezéseit behelyettesítve (4)-et kapjuk.

Pataricza András (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)