Jelöljük az ábra első n vízszintes sorában látható háromszögek számát H_n nel. H_n néhány kezdeti értéke:

$$H_1 = 1,\ H_2 = 5,\ H_3 = 13,\ H_4 = 27,\ H_5 = 48,\ H_6 = 78,\ H_7 = 118,\ H_8 = 170,$$

ezek meghatározása volt az 1320. gyakorlat célja.[1] Már ezeknek megszámlálásánál láttuk, hogy célszerű a háromszögeket tipizálni; amihez egyrészt a nagyságuk, másrészt a fekvésük ad alapot. Háromszögeink mind hasonlóak az első sávbeli háromszöghöz, megfelelő oldalaik azéinak egész számú többszörösei. Ha ez a szorzószám k, az illető háromszöget k-típusúnak nevezzük. Állásuk szerint kétfélék a háromszögeink, vagy a vízszintes oldaluk felett, vagy az alatt helyezkednek el. Nevezzük az első típusúakat „ülőknek”, a többieket „állóknak”, közülük az első n vízszintes sávban láthatók számát jelöljük rendre U_n-nel és A_n-nel.

Az első n sávban látható háromszögek közül bizonyosakat már az első $(n-1)$ sáv megrajzolása után láthatunk. Számoljuk meg először az n-edik sáv megrajzolásakor láthatóvá váló új háromszögeket, ezek közül az ülők száma legyen u_n, az állóké a_n.

Az n-edik sáv megrajzolásakor n db 1-típusú ülő háromszög jelenik meg, $(n-1)$ db 2-típusú, általában $(n-k+1)$ db k-típusú, $k = 1, 2, \ldots, n$ mellett. Eszerint

$$u_n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Célszerű ebből rögtön meghatározni az összes ülő háromszög számát. Alakításokkal:

$$U_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{1\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 3}{2} + \frac{3\cdot 4}{2} + \ldots + \frac{(n-1)\cdot n}{2} + \frac{n\cdot(n+1)}{2} =$$
$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} + \left(\frac{2\cdot 3\cdot 4}{6} - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}\right) + \left(\frac{3\cdot 4\cdot 5}{6} - \frac{2\cdot 3\cdot 4}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{(n-1)n(n+1)}{6} - \frac{(n-2)(n-1)n}{6}\right) +$$
$$+ \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n-1)n(n+1)}{6}\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Az álló háromszögek közül az n-edik sáv megrajzolásakor $(n-1)$ db 1-típusú válik láthatóvá (hiszen ezeknek az alsó csúcsa az n-edik vízszintes egyenesen levő belső csúcs, és ilyen $(n-1)$ van). A 2-típusúak száma ennél 2-vel kevesebb (hiszen minden első típusúhoz találunk őt tartalmazó 2-típusút is, kivéve a két szélső 1-típusút), vagyis a 2-típusúak száma $(n-3)$. Általában az új k-típusú álló háromszögek száma $(n-2k-1)$ mindazokra a k-értékekre, amelyekre ez a szám pozitív. Célszerű tehát n paritása szerint két esetet megkülönböztetni:

$$a_{2m} = (2m-1) + (2m-3) + \ldots + 3 + 1 = \frac{2m\cdot m}{2} = m^2,$$
$$a_{2m+1} = 2m + (2m-2) + \ldots + 4 + 2 = \frac{(2m+2)\cdot m}{2} = (m+1)m.$$

Ezek összegezésénél felhasználjuk az U_n meghatározásánál kapott

$$\frac{1\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 3}{2} + \frac{3\cdot 4}{2} + \ldots + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(m+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

összefüggést, és az ebből levezethető

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + \ldots + n\cdot(n-1) + 1 + 2 + \ldots + n =$$
$$= \frac{(n-1)n(n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

összefüggést. Ezek szerint

$$A_{2m} = (a_{2m} + a_{2m-2} + \ldots + a_2) + (a_{2m-1} + a_{2m-3} + \ldots + a_1) =$$
$$= [m^2 + (m-1)^2 + \ldots + 1^2] + [m(m-1) + (m-1)(m-2) + \ldots + 0] =$$
$$= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{(m-1)m(m+1)}{3} = \frac{m(m+1)(4m-1)}{6},$$
$$A_{2m+1} = a_{2m+1} + A_{2m} = (m+1)m + \frac{m(m+1)(4m-1)}{6} = \frac{m(m+1)(4m+5)}{6}.$$

U_n és A_n értékeinek az összegéből kapjuk a keresett H_n számot:

$$H_{2m} = U_{2m} + A_{2m} = \frac{2m(2m+1)(2m+2)}{6} + \frac{m(m+1)(4m-1)}{6} = \frac{m(m+1)(4m+1)}{2},$$
$$H_{2m+1} = U_{2m+1} + A_{2m+1} = \frac{(2m+1)(2m+2)(2m+3)}{6} + \frac{m(m+1)(4m+5)}{6} =$$
$$= \frac{(m+1)(8m^2+16m+6+4m^2+5m)}{6} = \frac{(m+1)(4m^2+7m+2)}{2}.$$

[1] Lásd a megoldást ezen számban, 136. old.

Tehát ha n páros,

$$H_n = \frac{n(n+2)(2n+1)}{8} = \frac{1}{8}(2n^3 + 5n^2 + 2n),$$

ha pedig n páratlan, akkor

$$H_n = \frac{(n+1)(2n^2+3n-1)}{8} = \frac{1}{8}(2n^3 + 5n^2 + 2n - 1).$$

Mindkét esetet tartalmazza a következő formula:

$$H_n = \left[\frac{2n^3 + 5n^2 + 2n}{8}\right].$$