A X. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát a Szovjetunió rendezte meg Moszkvában 1968. július 6–18. között. A versenyen 12 csapat vett részt, 8–8 tanulóval: angol, bolgár, csehszlovák, jugoszláv, lengyel, magyar, mongol, német (NDK), olasz, román, svéd és szovjet csapat. Július 10-én és 11-én írtak egy-egy dolgozatot, 3–3 feladatra 4–4 órai munkaidő állt rendelkezésre. A verseny feladatai a következők voltak.

Első nap. 1. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan háromszög van, amelyben az oldalak mérőszámai egymást követő természetes számok, azonkívül az egyik szög kétszer akkora, mint ennek a háromszögnek egy másik szöge.

2. Határozzuk meg az összes olyan x természetes számot, amelyre

$$p(x) = x^2 - 10x - 22, \tag{1}$$

ahol $p(x)$ a tízes számrendszerben felírt x szám számjegyeinek, szorzatát jelenti.

3. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\begin{aligned} &ax_1^2 + bx_1 + c = x_2 \\ &ax_2^2 + bx_2 + c = x_3 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &ax_{n-1}^3 + bx_{n-1} + c = x_n \\ &ax_n^2 + bx_n + c = x_1 \end{aligned} \tag{2}$$

egyenletrendszernek, ahol a, b, c adott valós számok és $a \neq 0$,

I. $(b-1)^2 - 4ac < 0$ esetén nincs valós megoldása;

II. $(b-1)^2 - 4ac = 0$ esetén egyetlen valós megoldása van;

III. $(b-1)^2 - 4ac > 0$ esetén egynél több valós megoldása van.

Második nap. 4. Bizonyítsuk be, hogy minden tetraédernek van olyan csúcspontja, amelybe futó élekkel mint oldalakkal háromszöget lehet szerkeszteni.

5. Jelentsen f olyan valós függvényt, amely minden valós x-re értelmezett, továbbá a következő tulajdonságú:

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - \left[f(x)\right]^2}, \tag{3}$$

ahol a adott pozitív szám.

I. Bizonyítsuk be, hogy az f függvény periodikus, azaz létezik olyan pozitív b szám, amelyre x minden értéke esetén fennáll:

$$f(x+b) = f(x). \tag{4}$$

II. Adjunk konkrét példát (az azonosan állandótól különböző) ilyen f függvényre, ahol $a = 1$.

6. Jelentse $[x]$ azt a legnagyobb egész számot, amely legfeljebb akkora, mint az x valós szám. Számítsuk ki az

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \ldots \tag{5}$$

összeg értékét minden pozitív egész n számra, és bizonyítsuk be a kapott eredmény helyes voltát.

Az egymás utáni feladatok teljes megoldásával rendre 6, 7, 7, 5, 7, 8 pontot szerezhettek a versenyzők. A 40–39 pontot elért versenyzők – szám szerint 22-en – I. díjban részesültek, a 38–33, ill. 32–26 pontot elértek II., ill. III. díjban, számuk 22, ill. 20 volt.

A magyar versenyzők közül I. díjban *Babai László* (Budapest, Fazekas M. Gyakorló Gimnázium), *Csirmaz László* (Budapest, I. István Gimnázium) és *Pintz János* (Fazekas) részesült, mindhárman 40 ponttal.

II. díjat nyertek *Lempert László* (Budapest, Radnóti M. Gyakorló Gimnázium, 38 pont), *Szűcs András* (Fazekas, 38 pont) és *Kóczy László* (Fazekas, 36 pont), III. díjat *Mérő László* (Budapest, Berzsenyi D. Gimnázium, 31 pont) és *Michaletzky György* (Budapest, Piarista Gimnázium, 28 pont).

4 versenyző, köztük *Csirmaz László* és *Babai László* külön oklevélben részesült valamelyik feladat különösen szép megoldásáért.

Bár a verseny – híven az eddigi szokáshoz – egyéni volt, közöljük az egyes csapatok által elért összes pontszámokat, valamint zárójelben az elért I., II., III. díjak számát is. Anglia 263 (3, 2, 2), Bulgária 204 (0, 3, 1), Csehszlovákia 248 (2, 4, 0), Jugoszlávia 179 (0, 0, 3), Lengyelország 262 (2, 3, 2), Magyarország 291 (3, 3, 2), Mongólia 74 (0, 0, 0), NDK 304 (5, 3, 0), Olaszország 132 (0, 0, 1), Románia 208 (1, 1, 2), Svédország 256 (1, 2, 5), Szovjetunió 298 (5, 1, 2).