A *Bolyai János Matematikai Társulat* a szokásos Arany Dániel tanulóversenyeket ez évben is a *Művelődésügyi Minisztérium* támogatásával rendezte. Az I. fordulók február 29-én, a II. fordulók május 3-án voltak, mindkétszer 4 órai munkaidővel. A múlt évi kezdeményezést folytatva ebben az évben is az I. fordulóból mindkét korcsoport versenyzői 15–15 feladat közül tetszés szerint választott feladatok megoldása alapján juthattak be a II. fordulóba. Minden egyes versenyző sokszorosítva kézbe kapta a 15 feladat szövegét, valamint azt, hogy az egyes feladatok teljes megoldásával hány pont érhető el. A II. fordulókban a szokás szerint ezidén is 3–3 feladat volt kitűzve, külön-külön az általános tantervű osztályok versenyzői, illetőleg a szakosított tantervű matematikai osztályok versenyzői részére. A szakosított tantervű matematika–fizika osztályok tanulói az általános tantervű osztályok versenyében vettek részt, azonban a három feladat közül egyik helyett külön feladatot kellett kidolgozniuk.

A *Versenybizottság* az I. forduló alapján a II. fordulóra a kezdők korcsoportjában 124, a haladók korcsoportjában 122 versenyzőt hívott be, közülük 30, illetőleg 43 volt valamelyik szakosított tantervű matematikai osztály tanulója, és 41, illetőleg 25 volt matematika–fizika osztálybeli.

A versenyek tételei

I. forduló, kezdők részére. 1. *Írjuk egyszerűbb alakba a következő kifejezést:*

$$K=\left(\frac{a+2b}{a-2b}-\frac{a-2b}{a+2b}\right):\left(\frac{a-2b}{a+2b}+1\right).$$

Határozzuk meg K értékét, ha $a=3{,}5$, $b=-1{,}5$; továbbá ha $a=3$, $b=-1{,}5$.

2. *Egy négyzet és egy rombusz oldalai egyenlők. A rombusz hegyesszöge 30°. Hányad része a rombusz területe a négyzet területének?*

3. *Az x mely értékeire igaz a következő egyenlőtlenség?*

$$\frac{x+2}{x-3}>\frac{x-2}{x+4}.$$

4. *Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan kétjegyű szám, amely egyenlő számjegyeinek szorzatával.*

5. *Bizonyítsuk be, hogy merőleges szárú szögek szögfelezői vagy párhuzamosak, vagy merőlegesek egymásra.*

6. *Két egyenlő magasságú gyertyát egyszerre gyújtunk meg. Az első 4 óra alatt, a második 3 óra alatt ég el. Hány óra múlva lesz az első gyertya-csonk kétszer olyan magas, mint a második, ha a gyertyák magassága egyenletesen csökken?*

7. *Az ABC háromszög AB és AC oldalait hosszabbítsuk meg a B, illetőleg C csúcson túl. Rajzoljuk meg a meghosszabbításokat és a BC oldalt érintő kört, legyen O ennek a középpontja. Bizonyítsuk be, hogy a $BOC\sphericalangle$ nagysága csak a $BAC\sphericalangle$ nagyságától függ.*

8. *Az m paraméter mely értéke mellett lehet a $4x^2-6x+m$ kifejezésből $(x-3)$-at kiemelni?*

9. *Egy autóbusz 30 perc alatt teszi meg a végállomások közti utat. A végállomásról 2 percenként indítanak buszokat. Egy busszal egyidőben elindul egy autó az egyik végállomásról. Az autó sebessége négyszer akkora, mint a busz sebessége. Hány autóbuszt előz meg az autó a másik végállomásig?*

10. *Az ABC háromszögben $AC=BC$. Rajzoljunk a BC oldalra kifelé egy $BCDE$ négyzetet. Határozzuk meg a $BAD\sphericalangle$ nagyságát a háromszög szögeinek felhasználásával.*

11. *A-ból B-be 4 turistaút vezet: piros, sárga, kék és zöld jelzésű. B-ből C-be 2 turistaút vezet: piros és kék, C-ből D-be pedig 3 turistaút visz: piros, sárga és zöld. – a) Hányféleképpen járhatjuk be az $ABCD$ útvonalat? b) Hányféleképpen járhatjuk be az $ABCD$ útvonalat úgy, hogy a középső szakaszon más színű jelzésen haladunk, mint előtte és utána?*

12. *Az A városból két autó indult el egyidőben az A-tól 120 km-re fekvő B városba. Az első autó 40 km/óra, a második 30 km/óra sebességgel haladt. Az első autó útközben a C faluban 1 órára megállt, B-ben 1 órát állt, majd visszaindult. A második autó csak B-ben állt meg 0,5 órára, azután visszaindult A-ba. Állapítsuk meg, hogy az oda-vissza út folyamán hol találkozott egymással a két autó.*

13. *Szerkesszük meg az $ABCD$ trapézt, ha adott az $AB+CD=d$ és az $AC=e$ szakasz, továbbá az $ABD\sphericalangle=\varepsilon$ és a $DAB\sphericalangle=\alpha$ szög. (AB és CD a trapéz alapjai.)*

14. *Tűzzünk ki a síkon 9 pontot úgy, hogy közülük bármely három ne legyen egy egyenesen. Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyeknek csúcsait az adott pontok közül választottuk ki. Bizonyítsuk be, hogy – bárhogyan is húzunk a síkon két egyenest – mindig lesz olyan háromszög, amelynek oldalait egyik egyenes sem metszi.*

15. *Egy 12 dm hosszúságú drótból egy 1 dm oldalélű kocka élvázát kell elkészítenünk. Legfeljebb hány kockaélet tudunk elkészíteni úgy, hogy közben nem vágjuk el a drótot?*

Elérhető pontszám – a haladó korcsoportban is – a feladat *teljes* megoldása esetén: az 1–7. feladatban 6 pont, a 8–12. feladatban 8 pont, a 13–15. feladatban 10 pont volt. Részmegoldásért a töredéknek megfelelően kaptak pontot a versenyzők.

I. forduló, haladók részére. 1. *Egy társaság közösen vásárolt egy ajándéktárgyat, azonban a számla kiegyenlítésekor négyen hiányoztak, és ezért mindenki* 36 *forinttal többet fizetett be a tervezettnél. Ezután három távollevő megérkezett, és a költségek újrafelosztása után a befizetők visszakaptak egyenként* 30 *forintot. Hányan voltak a társaságban, és mennyibe került az ajándéktárgy?*

2. *Két kör az E pontban kívülről érintkezik. Egy az E-n átmenő egyenes a köröket még A-ban, illetőleg B-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy az A-n és B-n átmenő és A-ban az első kört érintő kör sugara egyenlő az adott körök sugarainak összegével.*

3. *Bizonyítsuk be, hogy ha öt egymás után következő természetes szám közül a negyedik törzsszám, akkor az öt szám szorzata osztható* 240*-nel.*

4. *Az AB átmérőjű félkörív felezőpontja C, egy további pontja D, ennek a merőleges vetülete AB-n az E pont. Bizonyítandó, hogy $AC^2 = CE^2 + DE^2$.*

5. *Két kocka közül az egyiknek a felszíne p%-kal kevesebb, mint a másiké. Hány %-kal kevesebb az előbbi kocka térfogata, mint az utóbbié?*

6. *Egy szabályos hatoldalú gúla két szomszédos oldaléle 30°-os szöget zár be. Mekkora az oldallapnak az alaplappal bezárt szöge?*

7. *Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést.*

$$A = \frac{a^4 - b^4}{a^3b + ab^3} - \frac{ab - b^2}{ab - a^2}.$$

8. *Az a, b és c pozitív számok szorzata* 1*. Számítsuk ki a következő kifejezés értékét.*

$$S = \frac{a}{ab + a + 1} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{c}{ca + c + 1}.$$

9. *Döntsük el a következő kifejezés előjelét.*

$$N = \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

10. *Adott két pont és egy kör. Szerkesszünk oly paralelogrammát, melynek két csúcsa a két adott pont, másik két csúcsa pedig az adott körön fekszik.*

11. *Bizonyítsuk be, hogy ha*

$$xy = a^2b + ab^2, \quad x^2 - xy + y^2 = a^3 + b^3 \quad \text{és} \quad a \neq \pm b,$$

akkor

$$\left(\frac{x + y}{x - y}\right)^2 = \left(\frac{a + b}{a - b}\right)^2.$$

12. *Két pontszerű test ugyanazon a körpályán kering ugyanabban az irányban; sebességük aránya* $6 : 10$*. Valamely időpontban találkoznak a körpálya bizonyos pontjában. Ugyanebben a pontban a legutóbbi találkozás* 3 *perccel azelőtt volt. Számítsuk ki a testek keringési idejét.*

13. *Mutassuk meg, hogy a derékszögű háromszögbe írható kör sugara kisebb a hosszabbik befogó háromtized részénél.*

14. *Állapítsuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a következő egyenletben a gyökök négyzetösszege a lehető legkisebb legyen.*

$$x^2 + (3p - 2)x - (7p + 1) = 0.$$

15. *Egy az $ABCD$ paralelogramma D csúcsán átmenő egyenes a BA egyenest az E pontban, a BC egyenest F-ben metszi. Egy a B csúcson átmenő egyenes pedig DA-t a G pontban, DC-t a H-ban metszi. Bizonyítsuk be, hogy EG párhuzamos FH-val.*

II. forduló, kezdők korcsoportja, általános tantervű osztályok részére. 1. *Bizonyítsuk be, hogy ha az x, y és z számok között van 0-tól különböző, és a, b, c olyan számok, amelyekre*

$$ax + by + cz = 0,$$
$$cx + ay + bz = 0,$$
$$bx + cy + az = 0,$$

akkor

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0.$$

2. *Egy húrnégyszög átlói egyenlők. Szerkesszük meg a négyszöget, ha adott átlóinak hossza, két szemközti oldalának összege és egy szöge.*

3. *Egy ifjúsági szervezet vezetőségi tagjai négy bizottságban működnek. Minden vezetőségi tag két bizottságban dolgozik, és bármelyik két bizottságnak egy közös tagja van. Hányt tagú a vezetőség?*

A szakosított tantervű matematika–fizika osztályok tanulóinak a 2. feladat helyett a következőt kellett kidolgozniuk:

2. mf. *Az ABC háromszög AC oldalára négyzetet rájzolunk a B-t tartalmazó partján. Mi a négyzet C-vel szemben levő csúcsának mértani helye, ha A, B rögzített és C befutja az AB átmérőjű kört?*

II. forduló, kezdők korcsoportja, szakosított tantervű matematikai osztályok részére. 1. *Legyen az ABC háromszög síkjában levő P pont tükörképe az AB, BC, CA egyenesre rendre P_c, P_a, P_b, a $P_aP_bP_c$ háromszög köré írt kör középpontja Q. Legyenek továbbá Q hasonlóan képzett tükörképei Q_c, Q_a, Q_b. Bizonyítsuk be, hogy az ezeken átmenő kör középpontja P.*

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha k pozitív egész szám, akkor*

$$k^3 + 2k^2 + 2k + 1$$

nem négyzetszám.

3. Milyen szabályszerűség alapján képezték az alábbi számhármasokat:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}; \qquad \frac{4}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{7}; \qquad \frac{4}{5}, \frac{5}{2}, \frac{9}{7}; \qquad \frac{4}{9}, \frac{9}{4}, \frac{13}{13}?$$

Rendezzük a 3–3 számot nagyság szerint. Mit tapasztalunk? Igaz-e az itt észrevehető összefüggés általánosan is?

II. forduló, haladók korcsoportja, általános tantervű osztályok részére. 1. Azonos a kezdők korcsoportjában az ált. tantervű osztályok részére kitűzött 1. feladattal.

2. *A k körbe rajzolt $ABCD$ téglalap AB oldalának E pontjában emelt merőleges a k kört az F pontban metszi, mégpedig úgy, hogy a DC egyenes elválasztja E-t és F-et. Bizonyítsuk be, hogy ha FC párhuzamos DE-vel, akkor*

$$AD : AE = AE : EF = EF : AB.$$

3. *Egy derékszögű háromszög oldalai egész számok, tízes számrendszerbeli alakjuk: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{BDA}$, ahol A, B, C és D az egyes számjegyeket jelentik. Határozzuk meg a háromszög oldalait.*

A szakosított tantervű matematika–fizika osztályok tanulóinak az 1. feladat helyett a következőt kellett kidolgozniuk:

1. mf. *Adva van 6 szám, melyeket úgy nyertek, hogy 4 tetszés szerinti számból kettőt-kettőt minden lehetséges párosításban összeadtak:*

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots \leq s_6.$$

Határozzuk meg az eredeti négy számot.

II. forduló, haladók korcsoportja, szakosított tantervű matematikai osztályok részére. 1. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$x^2 + xy + y^2 = 7,$$
$$x^2 + xz + z^2 = 13,$$
$$y^2 + yz + z^2 = 19.$$

2. *Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasságának talppontja T, a BC befogó felezőpontja F. Az a kör, amelyik a háromszög A pontból induló súlyvonalát F-ben érinti és a B csúcson is átmegy, messe a háromszög átfogóját másodszor a D pontban. Bizonyítsuk be, hogy az ABF és FTD háromszögek hasonlók.*

3. *Egy versenyen hatan indultak: A, B, C, D, E és F. Valaki telefonon kért felvilágosítást a sorrendről. „Találja ki!” – volt a válasz. „Talán A, B, C, D, E, F?” „Szó sincs róla! Senkinek sem találta el a helyezését, sőt a versenyzők egymásutánját sem; vagyis a helyes sorrendben senkit sem az követ közvetlenül, aki az ön tippje szerint következik.” – „Akkor talán F, E, A, C, B, D?” – „Most már sokkal jobb: háromnak eltalálta a helyezését és három olyan van, aki ezúttal helyes sorrendben követi a közvetlenül előtte állót.” – Mi a helyes sorrend?*

A versenyek eredménye

A) Kezdők versenyei

A 1. *Az általános tantervű és a matematika–fizika osztályok versenyén* mindhárom feladatot kiemelkedően megoldotta, I. díjban, 250 Ft jutalomban részesült

Frankl Péter (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., mat.–fiz., tanára: Kiss Sándor),

mindhárom feladatot kisebb hiányossággal megoldotta, II. Díjban, 150–150 Ft jutalomban részesült:

Keresztes Tibor (Budapest, Radnóti M. Gyak. Gimn., mat.–fiz., tanára: Sugár György) és

Martoni Viktor (Veszprém, Lovassy L. Gimn., mat.–fiz., tanára: Knoll János).

Kiemelkedő munkáért első dicséretben és 50 Ft-os könyvutalványban részesültek (betűrendben felsorolva): *Bolla József* (Bpest, Eötvös J. Gimn., mat.–fiz., tanára: Nagy Miklósné), *Göndőcs Ferenc* (Győr, Révai M. Gimn., mat.–fiz., tanára: Gémesi Gabriella), *Horváth László* (Hódmezővásárhely, Ságvári E. Alt. Isk., 8. oszt., tanára: Ujvári Józsefné), *Jeszenszky József* (Kecskemét, Katona J. Gimn., tanára: Horti Áttila), *Nagy Zoltán* (Bpest, Piarista Gimn., tanára: Varga László), *Pósfai János* (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., mat.–fiz., tanára: Dallos Gyula) és *Szabó Lóránt* (Székesfehérvár, József A. Gimn., tanára: Wolkensdorfer János).

További kilenc tanuló második dicséretben, oklevélben részesült (betűrendben felsorolva): *Kunszenti Ágnes* (Dunaújváros, Gimn., tanára: Fejős Ádám), *Pásztor Miklós* (Bpest, Ságvári E. Gyak. Isk., tanára: Ries Ferenc), *Péter Erika* (Dombóvár, Gőgös I. Gimn., tanára: Feszt Katalin), *Sümeghy Ferenc* (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., mat.–fiz., tanára: Vadvári Tiborné), *Szabó Éva* (Bpest, Radnóti M. Gyak. Isk., mat.–fiz., tanára: Sugár György), *Szendrei Ágnes* (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., mat.–fiz., tanára: Hajnal Imre), *Szendrei Mária* (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., mat.–fiz., tanára: Hajnal Imre), *Turán György* (Bpest, XII., Németvölgyi úti Ált. Isk. 8. o. t., tanára: Vágvölgyi Jenő), *Várgedő Tamás* (Bpest, Piarista Gimn., tanára: Varga László)

A 2. *A szakosított tantervű matematikai osztályok versenyén* mindhárom feladat kiemelkedő megoldásáért I. díjban, 250 Ft jutalomban részesült:

Úry László (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., tanára: Bánhegyi László).

Mindhárom feladat szép megoldásáért II. díjban, 200 Ft jutalomban részesült:

Komjáth Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., tanára: Kőváry Károly).

Mindhárom feladatot megoldotta kisebb hiányosságokkal, dieséretben és 50–50 Ft-os könyvutalványban részesült (betűrendben felsorolva): *Bajmóczy Ervin, Bosznay Ádám, Lázár András* és *Ruzsa Imre*, valamennyien a budapesti Fazekas M. Gyak. Gimn. tanulói, Kőváry Károly tanítványai.

B) Haladók versenyei

B 1. *Az általános tantervű és a matematika–fizika osztályok versenyén* mindhárom feladat teljes megoldásáért I. díjat, 250 Ft jutalmat nyert:

Lempert László (Budapest, Radnóti M. Gyak. Iskola, tanára: Cserepkei Ferenc).

Mindhárom feladat lényegében helyes megoldásáért II díjat, 150–150 Ft jutalmat nyert a következő négy versenyző:

Győry György (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., tanára: Vikár István),

Láz József (Budapest, Eötvös J. Gimn., mat.–fiz., tanára: Imrecze Zoltán),

Skopál István (Budapest, Kölcsey F. Gimn., mat.–fiz., tanára: dr. Benda Kálmánné) és

Szamosújvári Sándor (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., tanára: Vikár István).

Győry az 1. feladatra adott kétféle megoldásával, Szamosújvári a 3. feladatra adott legteljesebb megoldásával tűnt ki, Láz és Skopál mindhárom feladat megoldása során egyenletesen jó teljesítményt nyújtott.

Két feladat teljes megoldásáért vagy két feladat lényegében helyes megoldásáért és a harmadikban elért részeredményért dicséretet és oklevelet kaptak: *Kérchy László* (Baja, III. Béla Gimn., mat.–fiz., tanára: Hegedüs József), *Kugler László* (Ajka, Bródy L Gimn., tanára: Balogh Antalné), *Nyikos István* (Bpest, Eötvös J. Gimn., mat.–fiz., tanára: Imrecze Zoltán), *Petravich Gábor* (Bpest, Eötvös J. Gimn., mat.–fiz., Imrecze), *Szabó György* (Nyíregyháza, Vasvári P. Gimn., mat.–fiz., tanára: Lakatos Zoltán) és *Szente János* (Pécs, Széchenyi I. Gimn., mat.–fiz., tanára: Tóth Júlia).

B 2. *A szakosított tantervű matematikai osztályok versenyén* öt tanuló mindhárom feladatot megoldotta. Közülük a 2. feladatra adott általánosítást is figyelembe véve, I. díjat, 250 Ft jutalmat nyert:

Gönczi István (Miskolc, Földes F. Gimn., tanára: dr. Csernyák Lászlóné).

Ugyancsak a 2. feladatra tett kiegészítéseikért II. Díjat, 150–150 Ft jutalmat nyertek:

Kóczy László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., tanárai: Thiry Imréné, Kardos Gyula) és

Somorjai Gábor (Budapest, I. István Gimn., tanárai: Jelitai Árpád, Móró Károly, Rácz János).

A feladatok egyszerű, teljes megoldásáért III. Díjat, 100–100 Ft jutalmat nyertek:

Alexits György (Budapest, Fazekas, Thiry Imréné, Reményi Gusztáv) és

Szőke Mária (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., tanárai: Herczeg János, Pogáts Ferenc).

Két feladat helyes megoldásáért és a harmadikban elért részeredményért dicséret. ben részesültek, oklevelet kaptak (betűrendben): *Barbarits András* (I. István), *Bauer Katalin* (Berzsenyi, Herczeg János, Ratkó István), *Beck József* (I. István), *Bertók Péter* (Bpest, Fazekas, tanárai: Thiryné, Kardos), *Borzsák Péter* (I. István), *Havril Katalin* (Bpest, Fazekas, Thiryné, Kardos), *Hermann Tamás* (Bpest, Fazekas, Thiryné, Kardos), *Kálmán Miklós* (Bpest, Fazekas, Thiryné, Reményi), *Nagy István* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., tanára: Tóth Izabella), *Pataki János* (Berzsenyi, Herczeg, Ratkó), *Prőhle Tamás* (Bpest, Fazekas, Thiryné, Kardos), T*ibor Éva* (Bpest, Fazekas, Thiryné, Reményi) és *Turi András* (I. István).

Kimutatás a II. fordulóba bejutott versenyzők számáról államigazgatási egységek szerint. Megyék: *Baranya:* 0 kezdő, 1 haladó (röviden: 0, 1); *Bács-Kiskun:* 3, 3; *Békés:* 0, 1; *Borsod-Abaúj-Zemplén:* 0, 3; *Csongrád:* 3, 1; *Fejér:* 4, 8; *Győr-Sopron:* 9, 11; Hajdú: 0, 0; Heves: 1, 2; *Komárom:* 4, 4; *Nógrád:* 1, 0; *Pest:* 3, 0; *Somogy:* 1, 2; *Szabolcs-Szatmár:* 2, 3; *Szolnok:* 3, 7; *Tolna:* 3, 1; *Vas:* 2, 0; *Veszprém:* 6, 2; Zala: 2, 2. Városok: *Budapest:* 65, 59; *Debrecen:* 5, 7; *Miskolc:* 1, 1; Pécs: 1, 2; *Szeged:* 5, 2. – Összesen 124, 122.