Megjegyzések az 1583. feladat[1] megoldásához

Vizsgáljuk először feladatunk állítását abban a speciális esetben, amikor $y_i = z_i = u_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Ekkor (3) a (2) összefüggés alapján a következő azonosságot jelenti:

$$(x_S - x_5)^2 = \frac{1}{4}\left[(x_1 - x_5)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_5)^2 + (x_4 - x_5)^2\right] -$$
$$\frac{1}{16}\left[(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (x_4 - x_2)^2 + (x_4 - x_3)^2\right],$$

amit az

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

jelöléssel, és (2)-t figyelembe véve a következő alakban írhatunk:

$$\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i - x_5\right)^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(x_i - x_5)^2 - \frac{1}{16}\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=j+1}^{4}(x_i - x_j)^2.$$

Ez az összefüggés az alábbi (3^*) összefüggés speciális esete $n = 4$ mellett, ha x_{n+1} helyett egyszerűen x-et írunk:

$$(3^*)\qquad \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - x\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

Ezt az összefüggést fogjuk először bebizonyítani.

A jobb oldal utolsó tagja a

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_j)^2$$

összeg fele, ezt figyelembe véve, és $2n^2$-tel szorozva a következő azonosságot kapjuk:

$$2\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)\right]^2 = 2n\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2 - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_j)^2$$

és a $v_i = x_i - x$ jelölést bevezetve

$$(^*)\qquad 2\left[\sum_{i=1}^{n} v_i\right]^2 = 2n\sum_{i=1}^{n} v_i^2 - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(v_i - v_j)^2.$$

A jobb oldalon

$$n\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} v_i^2,$$

így a jobb oldal átalakítható:

$$2n\sum_{i=1}^{n} v_i^2 - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(v_i - v_j)^2 = n\sum_{i=1}^{n} v_i^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} v_i^2 - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(v_i - v_j)^2 =$$
$$= n\sum_{i=1}^{n} v_i^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left[v_i^2 - (v_i - v_j)^2\right] = n\sum_{i=1}^{n} v_i^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} v_j(2v_i - v_j) =$$
$$= n\sum_{i=1}^{n} v_i^2 + 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} v_i v_j - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} v_j^2 = n\sum_{i=1}^{n} v_i^2 + 2\sum_{j=1}^{n} v_j\sum_{i=1}^{n} v_i - n\sum_{j=1}^{n} v_j^2 = 2\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)^2.$$

Ezzel azonosságunkat bebizonyítottuk. Figyeljük meg, hogy a $v_i \cdot v_j$ szorzásról csak a kommutativitást és a disztributivitást használtuk fel. Ha tehát v_i, v_j szimbolikusan a $v_i = (v_{i1}, \ldots, v_{ik})$, $v_j = (v_{j1}, \ldots, v_{jk})$ szám-k-asokat jelöli, és ezek szorzatát a

$$v_i v_j = \sum_{\nu=1}^{k} v_{i_\nu} v_{j_\nu}$$

összeggel definiáljuk, akkor $(^*)$ ugyanígy bizonyítható, hiszen ez a szorzás nyilván kommutatív és disztributív.

Továbbmenve, ha az $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ik})$, $x = (x_1, \ldots, x_k)$ szám-k-asok v_i különbségét a $v_{i_\nu} = x_{i_\nu} - x_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ relációval definiáljuk, akkor ezen az úton (3^*)-ot is értelmezhetjük tetszőleges szám-k-asokra, és az így kapott összefüggés bizonyítása pontosan a fenti úton történik.

[1] Lásd ezen számban, 130. o.