Az 1598. feladat II. megoldása[1] egy geometriai transzformációt használt fel, ami – az ott szereplő számadatoktól függetlenül – a következőképpen írható le:

Adott a síkon egy C pont és egy r távolság. Minden a C-től különböző R ponthoz a CR félegyenesnek azt a P pontját rendeljük hozzá, amelyre

$$CP \cdot CR = r^2.$$

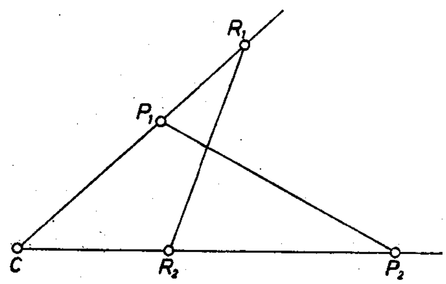
C-nek nincs képe és nem is képe egy pontnak sem.

Világos, hogy ennél a leképezésnél fordítva is, P képe R, és hogy a C középpontú, r sugarú k kör pontjai egybeesnek a képükkel, a kör belsejében levő pontok képe a körön kívül van és viszont. Ezt a leképezést a k körre vonatkozó *inverzió*nak vagy *tükrözés*nek szokás nevezni. Ismerkedjünk meg vele kicsit közelebbről.

A definíció szerint a C-ből induló félegyenesek (C-t nem számítva hozzájuk) az önmaguk képei, de csak egy-egy olyan pontjuk van, amely a saját képe; a C középpontú körök egy ugyanilyen körbe mennek át (de közülük csak k megy át önmagába).

A továbbiakban gyakran használjuk fel a következő segédtételt:

Ha az R_1, R_2 pontok képe P_1, P_2, és az R_1R_2 egyenes nem megy át C-n, akkor a CP_1P_2 és a CR_2R_1 háromszög hasonló (1. ábra).



1. ábra

Valóban, $CP_1 \cdot CR_1 = r^2 = CP_2 \cdot CR_2$, amiből a következő arányok egyenlőségét kapjuk:

$$\frac{CP_1}{CP_2} = \frac{CR_2}{CR_1},$$

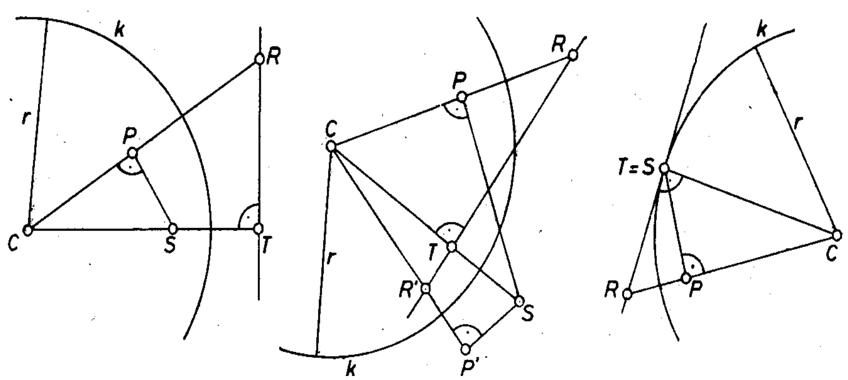
továbbá a két háromszög C-nél levő szöge közös. Ebből következik a segédtétel állítása. A két háromszög megadott körüljárási iránya ellentétes. (Ez magyarázza a tükrözés elnevezést is.)

Megmutatjuk, hogy

a) minden egyenes képe, amelyik nem megy át C-n, egy C-n átmenő kör[2],

b) minden kör képe, amelyik nem megy át C-n, újra kör, amelyik nem megy át C-n.

a) Várható, hogy az állításban szereplő kör C-ből induló átmérőjének másik végpontja a C-ből az egyenesre bocsátott merőleges T talppontjának S inverz képe lesz (2. ábra).



2. ábra

Megmutatjuk, hogy valóban az egyenes bármely, T-től különböző R pontjának P inverz képéből CS derékszögben látszik, tehát a CS átmérőjű körön van, és a kör minden, C-től különböző pontja az egyenes egy pontjának képe.

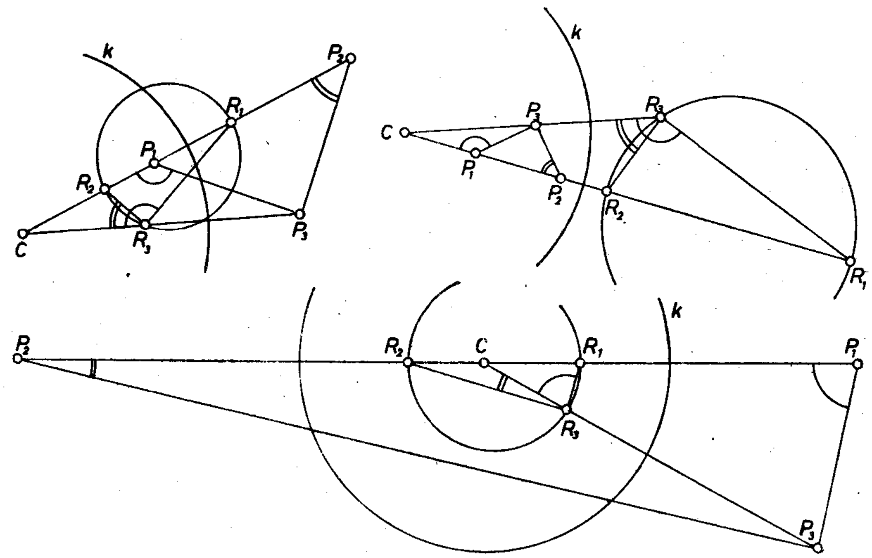
A CPS és CTR háromszögek a segédtétel szerint hasonlók, s mivel az előbbi T-nél derékszögű, így $CPS\sphericalangle = 90°$, amint állítottuk.

[1]Lásd ezen számban, 136. o.

[2]Az említett feladatmegoldásban ez bizonyítva van k-t metsző egyenesre.

Megfordítva, ha P a CS átmérőjű kör tetszés szerinti, C-től különböző pontja, akkor, R-rel jelölve CP metszéspontját az egyenessel, R inverz képe egyrészt a CR félegyenesen van, másrészt a CS átmérőjű körön, tehát csak a P pont lehet.

A *b)* állítás bizonyításához is egy várható átmérőről mutatjuk meg, hogy az a kör minden pontjának a képéből derékszögben látszik. Ez a várható átmérő a C-től legtávolabbi R_1 és a hozzá legközelebbi R_2 pont P_1 és P_2 képét összekötő szakasz. Mind a négy pont egy egyenesen, az adott kör és k centrálisának az egyenesén van. Legyen az adott kör egy további pontja R_3, képe P_3 (3. ábra).



3. ábra

A segédtétel szerint a CP_1P_3 és CR_3R_1, továbbá CP_2P_3 és CR_3R_2 háromszög hasonló, így

$$CP_1P_3\sphericalangle = CR_3R_1\sphericalangle \quad \text{és} \quad CP_2P_3\sphericalangle = CR_3R_2\sphericalangle.$$

Ha R_1 és R_2 ugyanazon a C-ből induló félegyenesen van, akkor a bal oldali két szög a $P_1P_2P_3$ háromszög P_1-nél levő külső szöge, ill. P_2-nél levő belső szöge, így

$$P_1P_3P_2\sphericalangle = CP_1P_3\sphericalangle - CP_2P_3\sphericalangle = CR_3R_1\sphericalangle - CR_3R_2\sphericalangle = R_2R_3R_1\sphericalangle = 90^\circ,$$

mivel R_1R_2 az adott kör egy átmérője.

Ha R_1 és R_2 között fekszik C, akkor egyszersmind P_1 és P_2 közt is fekszik, így a bal oldali szögek a $P_1P_3P_2$ háromszög belső szögei, ezért

$$CP_1P_3\sphericalangle + CP_2P_3\sphericalangle = CR_3R_1\sphericalangle + CR_3R_2\sphericalangle = R_1R_3R_2\sphericalangle = 90^\circ,$$

P_3 tehát valóban a P_1P_2 átmérőjű körön van.

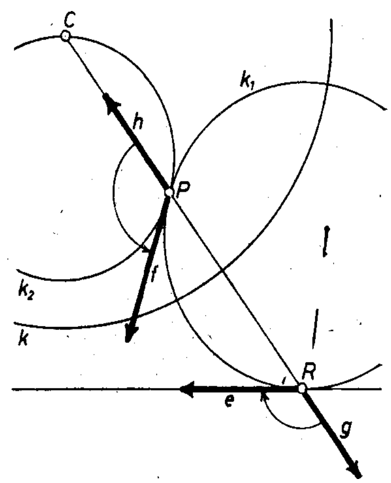
Legyen most P ennek a körnek tetszés szerinti pontja. A PC egyenes vagy metszi az R_1R_2 átmérőjű kört is, a P_1P_2 átmérőjű kört is, vagy mind a kettőt érinti, hiszen minden az előbbivel közös pont képe az utóbbival közös pont, ez, vagy ezek egyike pedig (ha két ilyen pont van) P, tehát P valóban egy az adott körön levő pont képe.

Görbékre is fennáll, amit pontokra mondtunk, hogy ha egyikük egy másiknak a képe, akkor az utóbbi is az előbbinek a képe.

Az eddig belátottakat összefoglalhatjuk úgy, hogy az inverzió az egyenesekből és körökből álló halmazt önmagába viszi át, vagyis minden egyenest és kört egyenesbe vagy körbe visz át.

Az inverzió egy további hasznos tulajdonsága, hogy szögtartó. Természetesen ahhoz, hogy egy szög képéről mint egy újabb szögről beszélhessünk, értelmezni kell közös végpontú körívek szögét. Ezen a közös végpontban az ívekhez húzott érintő félegyenesek szögét értjük.

A szög ilyen értelmezése mellett egy szög és a képe egyenlő nagyságú. Legyen R egy tetszőleges pont, melyre $0 < CR \neq r$, és e egy tetszőleges, R-végpontú, C-n nem átmenő félegyenes. A CR szakasz R-en túli meghosszabbítása legyen a g félegyenes, végül az R pont inverzét jelöljük P-vel, a P, R pontokon átmenő, e-t érintő kört k_1-gyel. A k_1 kör két pontban metszi k-t, hiszen P és R egyike k-nak belső pontja, a másik k-n kívül van, k_1 inverze is átmegy e metszéspontokon és a P, R pontokon, k_1-nek tehát az inverzével 4 közös pontja van, így k_1-et az inverzió önmagába viszi át (4. ábra).



4. ábra

Legyen az e, g félegyeneseknek a PR szakasz felező merőlegesére vonatkozó tükörképe f, h. Ekkor a g, e félegyenesek szöge egyenlő nagyságú, és ellentétes irányú, mint a h, f félegyenesek szöge. Az e egyenesnek k_1-gyel csak egy közös pontja van, R, így e inverzének, a k_2 körnek is csak egy közös pontja van vele, k_1 és k_2 tehát érintik egymást P-ben; emiatt k_1-nek P-beli érintője, az f félegyenes, k_2-t is érinti: az e, g félegyenesek szögét tehát az inverzió is az f, h félegyenesek szögébe viszi át, így állításunkat a speciálisan választott e, g szögre már bebizonyítottuk.

Ha az R pontból tetszőleges két félegyenes indul, mondjuk e_1 és e_2, akkor az e_1-et e_2-be vivő forgatás előállítható az e_1-et g-be, majd a g-t e_2-be vivő forgatások egymás után való végrehajtásával, ez utóbbi két szög inverze a fentiek alapján velük egyenlő nagyságú, de ellentétes irányítású, ugyanez igaz tehát az összegükre is.

Végül megjegyezzük, hogy ha R a k körön van, akkor invertáljunk először a C középpontú, $r' < r$ sugarú k' körre, majd a kapott képet $r^2 : r'^2$ arányban a C centrumból megnagyítva előállíthatjuk a k-ra vonatkozó inverzet. A k'-re való invertálás a fentiek alapján az R-csúcsú szögek irányítását ellentétesre változtatja, de e szögek nagyságát nem változtatja meg, a centrális hasonlóság a szögek nagyságát is, irányítását is megtartja, a k-ra való invertálás tehát ebben az esetben is megváltoztatja a szögek irányítását, de a nagyságukat változatlanul hagyja. Állításunk bizonyítását befejeztük.

Végül megmutatjuk, hogyan alkalmazhatók az elmondottak az 1542. feladat[3] megoldására. E feladat első részében lényegében azt kellett megmutatnunk, hogy tetszőleges ABC háromszögben, melynek talpponti háromszöge $A'B'C'$, az A és M pontok *harmonikusan választják el* a P, A' pontokat, ahol M a magasságpont, és P az AA', $B'C'$ egyenesek metszéspontja. Ez a kifejezés azt jelenti, hogy

$$\frac{AP}{PM} : \frac{AA'}{A'M} = -1,$$

ha az egyes szakaszok hosszát előjelesen vesszük, vagyis az AA' egyenest tetszőlegesen irányítjuk, és az ezzel az irányítással megegyező irányítású szakaszok hosszát pozitívnak, az ellentétes irányításúakét pedig negatívnak tekintjük. (A mondott feladatban az irányítástól eltekintettünk.)

Először megmutatjuk, hogy tetszőleges R pont, melyre $0 < CR \neq r$, és az R inverze, P harmonikusan választja el k-nak az RP egyenesen levő A, B pontjait. Válasszuk az RC félegyenes irányát pozitívnak, és legyen A a CR félegyenesen, ekkor valóban

$$\frac{RA}{AP} : \frac{RB}{BP} = \frac{RC-r}{r-PC} : \frac{RC+r}{-r-PC} = -\frac{(RC-r)(PC+r)}{(r-PC)(r+RC)} =$$
$$-\frac{RC\cdot PC - r\cdot PC + r\cdot RC - r^2}{r^2 - r\cdot PC + r\cdot RC - RC\cdot PC} = -1.$$

Invertáljuk az ABC háromszög k_1 Feuerbach-körét az AM szakasz feletti k Thalész-körre. A B', C' pontok mindkét körön rajta vannak, k_1 átmegy az inverzió O centrumán, k_1 inverze tehát a $B'C'$ egyenes. Az A' pont inverzét az OA' egyenes metszi ki $B'C'$-ből, A' inverze tehát P, így feladatunk állítása előrebocsátott megjegyzésünkből következik.

Feladatunk második részében többek között a k kört határoztuk meg az M pont és BC, $B'C'$ szakaszok D, ill. D' felezőpontja alapján. A fentiekből következik, hogy D-nek k-ra vonatkozó inverze D'. Feladatunknak ez a része tehát úgyis fogalmazható, hogy adott az inverzió alapkörének egyetlen pontja, M és egy további D pont, D' képével együtt. Legyenek a DD' egyenes k-val alkotott metszéspontjai U és V. Ekkor D, D' harmonikusan választja el az U, V pontokat. Emiatt a DD' feletti k_2 Thalész-körre invertálva U-t, éppen a V pontot kapjuk, k-nak k_2-re vonatkozó inverze tehát önmaga. Az M pont k_2-re vonatkozó inverze legyen M', ez is rajta van k-n. Tehát k középpontját az MM' szakasz felező merőlegese metszi ki a DD' egyenesből. Ha M a DD' szakasz felező merőlegesén van, akkor MM'

[3]Lásd ezen számban, 102. o.

felező merőlegese párhuzamos DD'-vel, k-nak O középpontja nem jön létre. Ebben az esetben az inverzió helyébe a DD' felező merőlegesére való tükrözés lép.