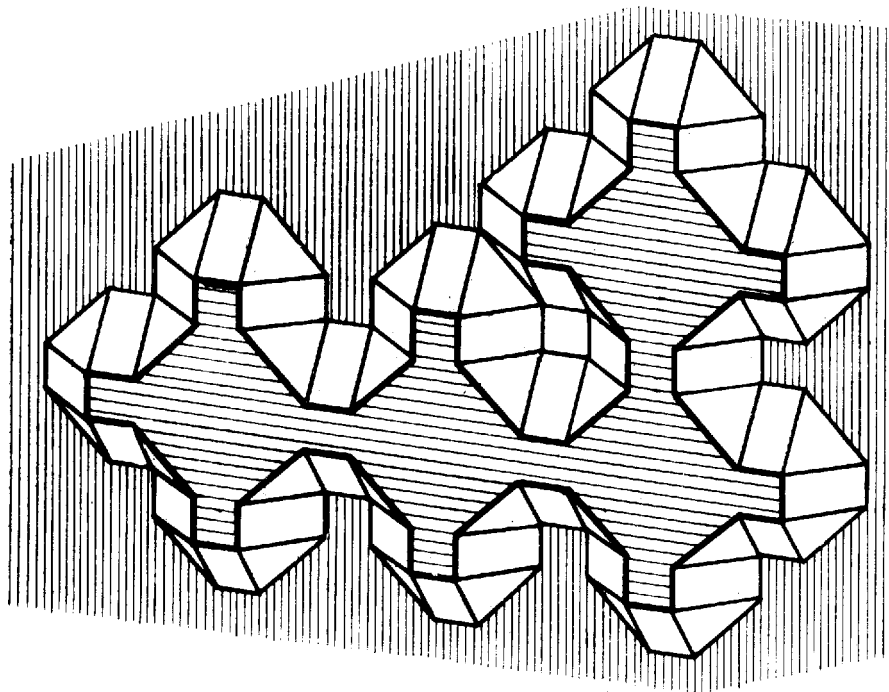
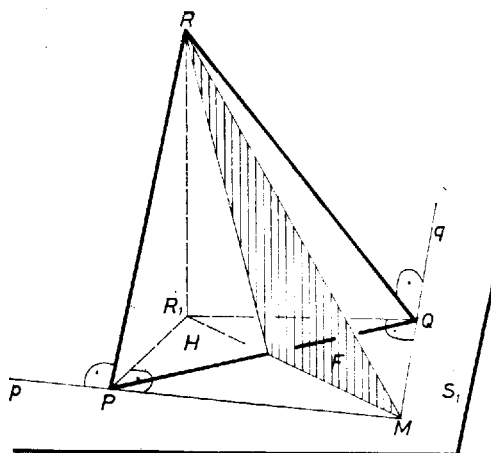


A kérdés kissé szokatlan feltevése – a „lehet” szóval – azt sejteti, hogy a válasz nem egyértelmű, több ilyen test van, és a térfogatuk természetesen más és más. Ezért először azt fogjuk megvizsgálni, melyek azok a testek, amelyekre ráillik a feladatbeli leírás. Külön figyelmet fordítunk azokra a megoldásokra, amelyekben a konvexitást használjuk fel, mert a versenyzők ezeket a részeket elnagyolták, „ösztönösen” jól alakították ki a testeket, de nem mutatták meg, hogy miért kell ezeknek a testeknek éppen olyanoknak lenniük, mint amilyenek, és így nem bizonyították be, hogy az általuk adott értékek a feladat összes megoldásai. Egy pillantás az 1. ábrára meggyőz arról, hogy ha a konvexitást nem tennénk fel, akkor végtelen sok test felelne meg a követelményeknek.



1. ábra

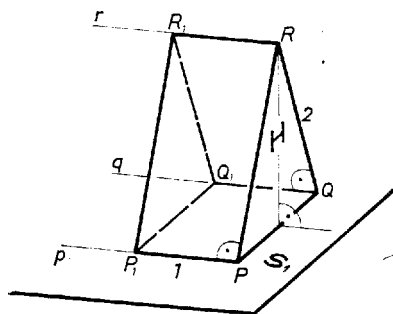
1. Állítsuk képzeletben vízszintesre azokat a párhuzamos síkokat, amelyek a vizsgált  $T$  test csúcsait hordozzák, és jelöljük őket  $S_1$ -gyel és  $S_2$ -vel. Nevezzük a testnek az  $S_1$  és  $S_2$  közötti lapjait oldallapoknak, és legyen  $H$  a  $T$  tetszőleges háromszög alakú oldallapja. Tegyük fel, hogy  $H$ -nak  $S_1$ -ben két csúcsa van, jelöljük ezeket  $P$ -vel,  $Q$ -val, és legyen  $R$  a harmadik csúcs. Jelöljük a  $H$ -hoz  $PR$ -ben csatlakozó oldallap síkjának  $S_1$ -gyel alkotott metszésvonalát  $p$ -vel. Mivel ez az oldallap téglalap, azért  $p$  merőleges  $PR$ -re. Hasonlóan legyen  $q$  a  $QR$ -hez csatlakozó oldallap síkjának és  $S_1$ -nek a metszésvonala,  $q$  merőleges  $QR$ -re. Megmutatjuk, hogy  $p$  és  $q$  a  $PQ$  szakasz  $F$  felező merőleges síkjára nézve tükrösen helyezkedik el (2. ábra).



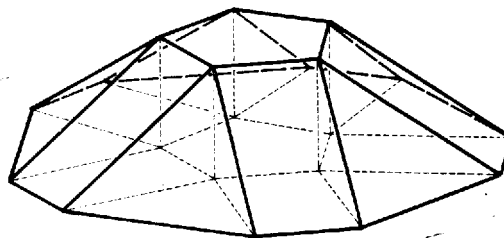
2. ábra

A  $PR$  egyenes nem lehet merőleges  $S_1$ -re, hiszen nem merőleges az  $S_1$ -beli  $PQ$  egyenesre. Így  $S_1$ -ben csak egy, a  $P$ -n átmenő,  $PR$ -re merőleges egyenes van. Tükrözzük az  $S_1$ -ből,  $H$ -ból és  $q$ -ból álló alakzatot  $F$ -re. Ekkor  $S_1$  és  $H$  önmagába megy át,  $q$  képe pedig olyan egyenes, amely átmege  $P$ -n és merőleges  $PR$ -re. Mivel ilyen csak egy van, azért  $q$  képe csak  $p$  lehet, állításunkat ezzel bebizonyítottuk.

Ha  $H$  síkja merőleges  $S_1$ -re,  $p$  és  $q$  párhuzamosak, és párhuzamos velük a  $H$ -hoz  $PR$ -ben és  $QR$ -ben csatlakozó lapok síkjának  $r$  metszésvonala is. Ez az  $r$  egyenes benne van  $S_2$ -ben és a konvexitás miatt  $T$ -nek az  $S_2$ -n levő bármely további csúcsa csak  $r$ -en lehet rajta. Emiatt  $T$ -nek egyetlen további csúcsa van  $S_2$ -n, legyen ez  $R_1$ , és legyen  $P_1$  és  $Q_1$  a  $PRR_1$ ,  $QRR_1$  háromszöget téglalappá kiegészítő pont. Ez a  $PQR$  alapú; egységnyi magasságú test az egyetlen olyan test, amelyike eleget tesz a feladat követelményeinek, és amelynek van  $S_1$ -re merőleges háromszög alakú oldallapja. Mivel két csúcsa van  $S_2$ -n, azért ezt a testet  $T_2$ -vel jelöljük (3a ábra).



3a. ábra

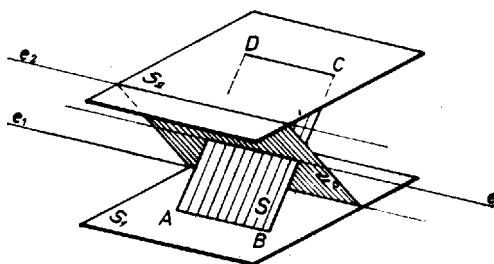


3b. ábra

Ha  $H$  nem merőleges  $S_1$ -re, akkor az  $R$  csúcsának az  $S_1$ -en levő  $R_1$  merőleges vetülete a  $PQ$  szakasz felezőpontjától különböző pont. Ismeretes, hogy  $R_1P \perp p$  és  $R_1Q \perp q$ , tehát  $p$  és  $q$  is metszi egymást, a metszéspontjuk,  $M$  rajta van az  $F$  síkon, és a  $PR_1Q$  háromszöget deltoiddá egészíti ki.  $H$  tehát „elhajlik”  $M$ -től,  $S_1$ -en levő árnyéka a  $PQ$  egyenes  $M$ -mel ellentétes oldalára esik. Magának a  $T$  testnek is ezen az oldalon kell lennie, hiszen konvexitása miatt minden csúcsa a  $H$  síkjának ugyanazon az oldalán van, és a  $H$ -hoz csatlakozó téglalapok csúcsai nem lehetnek  $H$ -nak az  $M$  felé eső oldalán, hiszen az  $MRP$  és  $MRQ$  szögek hegyesszögek, így ezeket a téglalapokat nem lehet az  $MRP$ ,  $MRQ$  síkrészekeken elhelyezni. (Ha  $T$  nem volna konvex, akkor e téglalapok úgyszólván elhelyezkedhetnének, hogy egyikük  $H$ -nak az  $M$  felé eső, másikuk az  $M$ -mel ellentétes oldalán van. Ilyen részlet található az 1. ábrán.) Ezzel beláttuk, hogy

- $T$ -nek a háromszög alakú lapjai a két párhuzamos sík közül ahhoz hajlanak hegyes szögben, amelyiken két csúcsuk van;
- az egymáshoz csatlakozó háromszögek és téglalapok  $S_1$ -gyel párhuzamos élei nem alkothatnak hegyes szöveget (mert például a 2. ábrán a  $PR$ -hez csatlakozó téglalaphoz az  $S_1$ -en levő további csúcsa  $MP$ -nek a  $P$ -n túli meghosszabbításán van).
- a háromszög alakú oldallapokhoz csatlakozó téglalapok e háromszögeknek az  $S_1$ -re merőleges szimmetriasíkjára nézve szimmetrikusan helyezkednek el.

2. Legyen  $ABCD$  a  $T$  testnek valamely téglalap alakú oldallapja, az  $A$ ,  $B$  csúcsok legyenek  $S_1$ -en,  $C$  és  $D$  pedig  $S_2$ -n. Jelöljük  $F_0$ -lal a  $BC$  és  $DA$  szakaszok közös felező merőleges síkját, ebben van benne a  $BC$ -hez, illetve  $DA$ -hoz csatlakozó háromszög-lapok  $E$ , illetve  $F$  csúcsa. Így  $F_0$  metszi az  $S_1$ ,  $S_2$  síkok közül legalább az egyiket, de akkor  $S_1$  és  $S_2$  párhuzamos volta miatt a másikat is metszi, és a két metszésvonal párhuzamos. Jelöljük ezeket  $e_1$ -gyel és  $e_2$ -vel,  $F_0$  és az  $ABCD$  lap  $S$  síkjának a metszésvonalát  $e$ -vel (4. ábra).



4. ábra

Nyilván  $e$  is párhuzamos  $e_1$ -gyel és  $e_2$ -vel, és  $e$  elválasztja egymástól ezt a két egyenest. Emiatt elválasztja egymástól  $S$  is az  $e_1$  és  $e_2$  egyeneseket, tehát  $T$ -nek nem lehet  $e_1$ -en is, és  $e_2$ -n is csúcsa. Tegyük fel, hogy  $e_2$ -n nincs csúcsa  $T$ -nek, tehát  $E$  és  $F$  az  $e_1$ -en van. Az  $ABEF$  négyszögben  $AB$  párhuzamos  $EF$ -fel,  $BE = AF$ , és az előző pont szerint az  $A$ -beli és a  $B$ -beli szög nem lehet hegyesszög. Tehát  $ABEF$  szimmetrikus trapéz. Ezzel beláttuk, hogy

- az ugyanahhoz a téglalaphoz csatlakozó háromszögeknek  $S_1$  és  $S_2$  közül ugyanabban van a hátralevő csúcsuk;
- a téglalap alakú oldallapokhoz csatlakozó két-két háromszög a téglalaphoz az  $S_1$ -re merőleges szimmetriasíkjára nézve tükrösen helyezkedik el.

3. Az előző pont  $a$ ) megállapításából  $T$ -t mintegy körbejárva kapjuk, hogy a háromszög alakú oldallapok mind-egyikének  $S_1$  és  $S_2$  közül ugyanabban van két csúcsa, legyen ez mondjuk  $S_1$ . Eszerint ha a  $T$  test  $S_2$ -beli csúcsainak a számát  $n$ -nel jelöljük, akkor  $T$ -nek  $S_1$ -ben  $2n$  csúcsa van. Könnyű látni, hogy  $n$  értéke nem lehet 1, tehát  $T$ -nek

$S_1$ -ben valódi lapja van, jelöljük ezt  $A_{2n}$ -nel, és jelöljük  $T$ -nek az  $S_2$ -ben levő részét  $F_n$ -nel: ha  $n = 2$ , akkor  $F_n$  csak egy szakasz, különben  $F_n$  is lapja  $T$ -nek. Az 1. pont *c)* megállapításából és a 2. pont *b)* megállapításából következik, hogy  $A_{2n}$  szögei egyenlőek. Ebből már könnyen bizonyítható, hogy ha  $n > 2$ , akkor  $F_n$  szabályos  $n$ -szög (3b ábra). Az 1. pont *a)* megállapítása szerint, ha  $F_n$  csúcsait  $S_1$ -re vetítjük, a vetületek benne lesznek  $A_{2n}$ -ben.

Jelöljük  $F$  területét  $f_n$ -nel, a téglalap és háromszög alakú oldallapok  $S_1$ -en levő vetületének a területét  $t_n$ -nel és  $h_n$ -nel, a test magasságát  $\lambda_n$ -nel. Ekkor az  $S_2$ -től  $x \cdot \lambda_n$  távolságra levő,  $S_2$ -vel párhuzamos sík a testből

$$t_n(x) = f_n + xnt_n + x^2nh_n$$

területű idomot vág ki, tehát a test térfogata

$$\begin{aligned} V_n &= \lambda_n \int_0^1 t_n(x) dx = \lambda_n \int_0^1 (f_n + xnt_n + x^2nh_n) dx = \\ &= \lambda_n \left( f_n + \frac{n}{2} \cdot t_n + \frac{n}{3} \cdot h_n \right). \end{aligned}$$

Könnnyen látható, hogy

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{n}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}, & \lambda_n &= \sqrt{4 - \frac{1}{\sin^2 \pi/n}}, \\ t_n &= \frac{1}{\sin \pi/n}, & h_n &= \operatorname{ctg} \pi/n, \end{aligned}$$

és hogy, amint az  $\lambda_n$  fenti alakjából is kiolvasható,  $n < 6$ . Az  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  esetekben a feladat követelményeinek eleget tevő testet kapunk, és ezek térfogata

$$\begin{aligned} V_2 &= \sqrt{3} = 1,732, & V_3 &= \frac{19\sqrt{2}}{6} = 4,478, \\ V_4 &= 4 + \frac{7\sqrt{2}}{3} = 7,300, & V_5 &= \frac{35}{12} + \frac{31\sqrt{5}}{12} = 8,693. \end{aligned}$$

Ezzel a megoldást befejeztük.