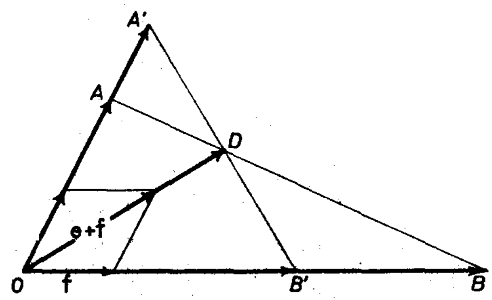
Vektorok segítségével az elemi matematika számolást igénylő feladatait is egyszerűen megoldhatjuk. Jól szemlélteti ezt a megállapítást az 1169. gyakorlat[1] alábbi megoldása.

Legyen a harmonikus közép megszerkesztéséhez használt szög csúcsa 0, a szárakra felmért a, b szakaszok végpontja A, ill. B. Vegyünk fel az 0-ból A-ba, ill. B-be mutató egységvektorokat, legyenek ezek $\mathbf{e}$, ill. $\mathbf{f}$. E vektorok választása miatt az $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ vektorok előállíthatók $\mathbf{a} = a\mathbf{e}$, $\mathbf{b} = b\mathbf{f}$ alakban, ahol a, b épp az OA, OB szakaszok előírt hossza. Mivel az $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ vektorok hossza egyenlő, a $\mathbf{g}$=$\mathbf{e}$+$\mathbf{f}$ vektor szerkesztéséhez használt paralelogramma rombusz, $\mathbf{g}$ állása tehát megadja az AOB szög felezőjének az állását. Messe az AB egyenes ezt a szögfelezőt D-ben, első lépésként a $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD}$ vektort állítjuk elő az $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ vektorok segítségével.



Mivel D rajta van az AB egyenesen, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overline{AB}$, ahol λ alkalmasan választott skalár; azaz

(1) $$\mathbf{d} = \mathbf{a} + \lambda((\mathbf{b}\text{-}\mathbf{a}) = (1-\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = (1-\lambda)a\mathbf{e} + \lambda b\mathbf{f}.$$

Mivel D a szögfelezőn is rajta van, $\overrightarrow{OD} = \mu\mathbf{g}$, ahol μ ugyancsak alkalmasan választott szám; azaz

(2) $$\mathbf{d} = \mu\mathbf{g} = \mu(\mathbf{e}+\mathbf{f}) = \mu\mathbf{e} + \mu\mathbf{f}.$$

A $\mathbf{d}$ vektorra tehát két előállítást is kaptunk, ezekben λ és μ ismeretlen. Meghatározásukhoz azt használjuk fel, hogy a $\mathbf{d}$ kívánt előállítása egyértelmű, tehát a kétfajta előállításban szereplő együtthatók rendre egyenlőek:

(3) $$\begin{aligned}(1-\lambda)\,a &= \mu,\\ \lambda\,b &= \mu.\end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása adja λ, μ értékeit:

(4) $$\lambda = \frac{a}{a+b}; \qquad \mu = \frac{ab}{a+b}.$$

A $\mathbf{d}$ vektor keresett előállítása tehát:

(5) $$\mathbf{d} = \frac{ab}{a+b}(\mathbf{e}+\mathbf{f}).$$

Szerkesztésünk következő lépésében az OD egyenesre a D pontban emelt merőlegessel metszettük a szög szárait. Legyenek a metszéspontok rendre az A', B' pontok, ekkor A, B előállításához hasonlóan $\mathbf{a}' = \overrightarrow{OA'} = h\mathbf{e}$, $\mathbf{b}' = \overrightarrow{OB'} = h\mathbf{f}$, ahol h az OA', OB' szakaszok hossza. Feladatunk a h meghatározása. Azt használjuk fel, hogy D az $A'B'$ szakasz felezőpontja. Emiatt

(6) $$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}' + \mathbf{b}') = \frac{h}{2}(\mathbf{e}+\mathbf{f}),$$

így a $\mathbf{d}$ vektor egy újabb előállítását kaptuk, melynek meg kell egyeznie a korábbi, (5) alatti előállítással, tehát

(7) $$h = \frac{2ab}{a+b},$$

amint azt bizonyítanunk kellett.

Megoldásunkkal kapcsolatban megjegyezzük, hogy az (1) alatti összefüggés alapján $\overrightarrow{AD} = \lambda(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, $\overrightarrow{DB} = (1-\lambda)(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, az $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$ vektorok hossza tehát úgy aránylik egymáshoz, mint $\lambda : (1-\lambda)$. Ebből (4) alapján kapjuk, hogy

(8) $$AD : DB = \frac{a}{a+b} : \frac{b}{a+b} = a' : b,$$

[1] Lásd ezen számban 70. o.

tehát a szögfelezőre vonatkozó ismert tételnek is egy újabb levezetését kaptuk. Ezt a tételt felhasználva az (5) alatti előállítást egyszerűbben is megkaphattuk volna a következő segédtétel alapján:

Az O pontból az AB egyenes egy tetszőleges C pontjába mutató $\mathbf{c} = \overline{OC}$ vektor előállítható

$$\mathbf{c} = \frac{\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}}{\alpha + \beta} \tag{9}$$

alakban, ahol

$$\alpha : \beta = AC : CB \tag{10}$$

(ez utóbbi arányban az AC, CB szakaszok hosszát előjelesen értjük: ha AC, CB iránya megegyezik, akkor előjelük egyforma, ha AC, CB ellentétes irányú, akkor a két szakasz hossza ellentétes előjelű).

Valóban, a $\mathbf{c}$ vektor által meghatározott C pontra

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = \frac{\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}}{\alpha + \beta} - \mathbf{a} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB},$$

tehát $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AB}$ állása megegyezik, így C az AB egyenesen van. Hasonló módon kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{CB} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB},$$

tehát a (9) alatti vektor által meghatározott C pontra érvényes (10).

Megoldásunk alapján az ABO háromszög szögfelezőjének a hosszát is kiszámíthatjuk. A $\mathbf{g} = \mathbf{e} + \mathbf{f}$ vektor szerkesztése alapján

$$|\mathbf{g}| = 2\cos\frac{\omega}{2},$$

ahol $\omega = AOB\sphericalangle$. Így (5) alapján

$$OD = \frac{2ab}{a + b}\cos\frac{\omega}{2}.$$