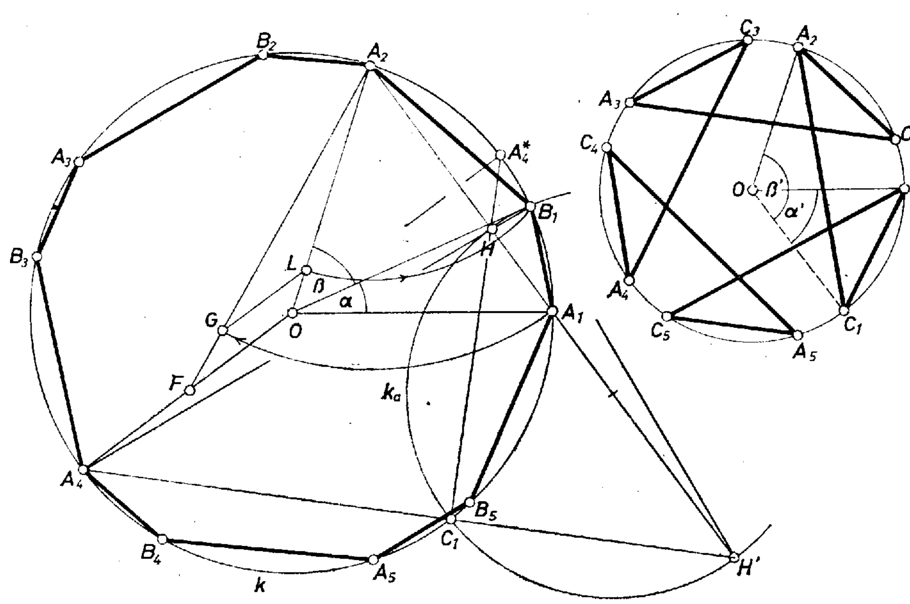
Előzetes megjegyzés. A feladatnak több, egymással nem egybevágó megoldása van, mert nincs előírva, hogy a 10-szög konvex legyen. Közönségesen konkáv (180°-nál nagyobb belső szöget tartalmazó) nem lehet az idom a körbe írható volta miatt, de hurkolt – amelyben az egymás utáni szögpontokat összekötő szakaszok át is metszhetik egymást, mint pl. az ismert csillagötszögben – többféleképpen is lehet.

A feladat szövege viszont *nem kívánja, hogy minden lehetséges* megoldást szerkesszen meg a versenyző, csak (legalább egy) „ *olyat*". Az *olyanok* közül a szerkesztőség többet közöl, de nem taglaljuk, hogy velük megadtunk-e minden megoldást.

I. megoldás. *a)* Az 1a. ábra szerinti $A_1B_1A_2B_2A_3\dots B_5$ konvex megoldásban $B_1A_2 = B_2A_3 = \dots = B_5A_1 = 2\cdot A_1B_1 = 2\cdot A_2B_2 = \dots = 2\cdot A_5B_5$. Az egymás közt egyenlő 5–5 oldal az adott k körnek egyenlő húrja, így az O középpontból vett látószögük egyenlő. Legyen $A_1OB_1\sphericalangle = \alpha$ és $B_1OA_2\sphericalangle = \beta$, így $5\alpha+5\beta = 360°, \alpha+\beta = A_1OA_2\sphericalangle = B_1OB_2\sphericalangle = \dots = B_5OB_1\sphericalangle = 72°$, tehát mind az A_i csúcsok, mind a B_i-k$(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ külön-külön egy-egy a k-ba beírt (konvex) szabályos ötszög egymás utáni csúcsai.

Megszerkesztve az $A_1\dots A_5$ segédötszöget – közismertnek vesszük az erre vonatkozó ún. Ptolemaiosz–Dürer-féle eljárást, ezért ezt itt nem részletezzük –, B_1-et a $B_1A_1{:}B_1A_2 = 1{:}2$ aránynak megfelelően kell megszerkesztenünk. Felhasználjuk, hogy a háromszög két oldalának aránya megjelenik a harmadik oldal két részének arányában, ha ezt a (belső) szögfelezővel vágjuk ketté. Eszerint az $A_1B_1A_2$ háromszög B_1-ből induló felezője az A_1A_2 húrt A_1-hez közelebbi H harmadoló pontjában metszi. Másrészt ez a szögfelező a kerületi szögekre vonatkozó tételek szerint a B_1-et nem tartalmazó A_1A_2 ívet is felezi, tehát átmegy a segédötszög A_4 csúcsán. Eszerint B_1-et k-ból az A_4H egyenes metszi ki, ebből a $B_2, \dots, B_5$ csúcsok már megszerkeszthetők.

A szerkesztés helyessége az elemzés alapján nyilvánvaló, a végrehajtás egyértelmű.

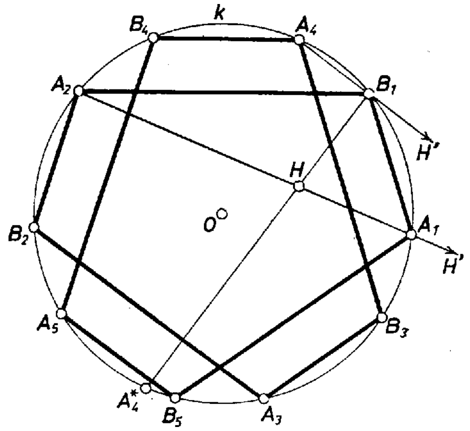


1a. *1b.*

b) Lényegében ugyanígy kapjuk az 1. ábra jobb felső sarkán bemutatott $A_1C_1A_2C_2A_3\dots C_5$ hurkolt megoldást, amelyben $C_1A_2 = C_2A_3 = \dots = C_5A_1 = 2A_1C_1 = 2A_2C_2 = \dots = 2A_5C_5$, de a rövidebb oldalakon mindig visszafelé haladunk a kétszer akkora oldalakon való előrehaladáshoz képest. Az ábra jelöléseivel itt $\beta' - \alpha' = 72°$. Eszerint C_1-et a nagyobb A_2A_1 köríven várjuk, és így H-t a rövidebb A_1A_2 ív A_4^* felezőpontjával (A_4 átellenes vontjával) összekötő egyenes metszi ki k-ból.

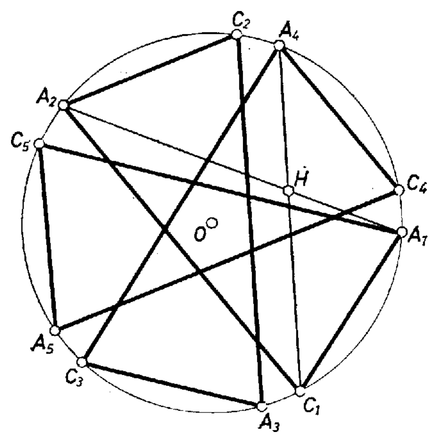
a) rész *Angyal József* (Budapest, Berzsenyi D. Gimn.)
b) rész *Földes Tamás* (Budapest, Berzsenyi D. Gimn.)

Az ábrákat annak kedvéért helyeztük el sorszámaiktól eltérő rendben, hogy a szöveg és a hozzá tartozó ábra – a kényszerű lapozás ellenére – könnyebben legyen együtt olvasható, szemlélhető.



2a. ábra

Megjegyzések. 1. A közönséges szabályos ötszög helyett szabályos csillagötszögből kiindulva ugyanígy kapjuk a $2a$ ábrabeli $A_1B_1A_2\ldots B_5$ megoldást és a $2b$ ábrabeli $A_1C_1A_2\ldots C_5$ megoldást (a fele akkora húron ismét ugyanazon irányban, ill. ellentétes irányban fordulunk el a körön), de a helyzet alapján mindkét esetben A_4-et, A_4^*-ot a másikukkal kell helyettesítenünk.



2b. ábra

Földes Tamás

2. A B_1, C_1 pontot kimetszhetjük k-ból az A_1, A_2 alappontokhoz és az $A_1P{:}PA_2 = 1{:}2$ távolságarányhoz tartozó k_a Apollóniosz-körrel is (1. és 2. ábrák). E kör egy átmérője a HH' szakasz, ahol H' az A_2A_1 szakasz A_1-en túli meghosszabbításán az a pont, melyre $A_2H' = 2A_1H'$, vagyis A_2-nek A_1-re vonatkozó tükörképe.

a) Horváth Márta (Tata, Eötvös J. Gimn.)

b) és a csillagötszögek esetében: *Földes Tamás*

3. Meg lehet mutatni, hogy H helyett a H' pont felhasználásával is szerkeszthető a B_1, C_1 pont, A_4 és A_4^* közül mindig a másikat használva, mint fent. (Ugyanis H'-t a B_1-nél, ill. C_1-nél levő külső szögfelező metszi ki az A_1A_2 egyenesből.) Ez a megállapítás az $1b$ ábra szerkesztésében előnyös, mert A_4^* elég közel van H-hoz, az A_4^*H egyenes rajzolása pontatlan lehet.

4. Ugyanezen elvek szerint 10-szög helyett $2n$-szög is szerkeszthető k-ba váltakozva kétszer, ill. feleakkora oldalakkal, hacsak a szabályos n-szög megszerkeszthető (eukleidészi módon).

II. megoldás. Az I. megoldás bevezetőjében látottak szerint $A_1B_1A_2\sphericalangle = 144^\circ$ – ami a szabályos ötszögből is kimásolható –, tehát egy 144°-os szög száraira 1 és 2 egységnyi szakaszokat fölmérve, a kívánthoz hasonló $A_1'B_1'A_2'$ háromszöget kapunk. Ha még megrajzoljuk ennek körülírt körét, és az ábrát úgy nagyítjuk vagy kicsinyítjük, hogy e kör sugara egyenlő legyen az adott kör sugarával, akkor az $A_1'B_1'A_2'$ háromszög képe egybevágó lesz az $A_1B_1A_2$ háromszöggel. Ebből már teljessé tehető az ábra.

Tóth-Pál Zsolt (Budapest, Móricz Zs. Gimn.)

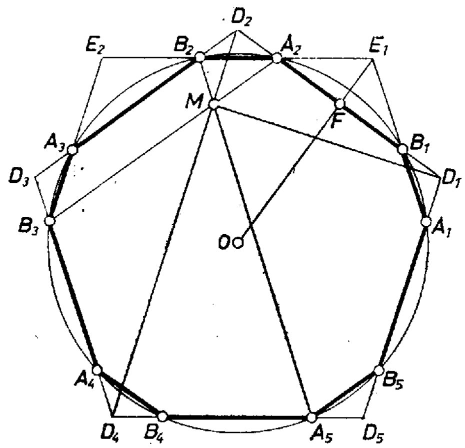
Megjegyzések. 1. Kimetszhetjük B_1-et úgy is, hogy az A_1 csúcsba lemásoljuk az $A_2'A_1'B_1'$ szöget.

Branda Éva (Vác, Sztáron S. Gimn.)

2. A mondott elv alapján, de még egyszerűbben visz célba a következő eljárás ($1a$ ábra). Legyen az OA_4 sugár felezőpontja F, így az FOA_2 háromszög hasonló $A_1B_1A_2$-höz. Ha még az A_2F, A_2O félegyenesen G, ill. L az a pont, amelyre $A_2G = A_2A_1$, ill. $GL||FO$, akkor az A_2 körüli, L-en átmenő kör a rövidebb A_1A_2 ívből kimetszi B_1-et.

III. megoldás (vázlat). A keresetthez hasonló sokszöget keresünk. Hosszabbítsuk meg az $1a$ ábrabeli 10-szög hosszabb oldalait, kapjuk a $D_1D_2\ldots$ szabályos ötszöget. Ennek oldala (3. ábra)

$$D_1D_2 = B_1A_2 + 2\cdot\frac{A_1B_1/2}{\cos 36^\circ} = A_1B_1\left(2+\frac{4}{\sqrt5+1}\right) = A_1B_1(1+\sqrt5)$$



3. ábra

($\cos 36^\circ = \sin 54^\circ$ értékét az 1766. feladatból[1] vettük át), tehát

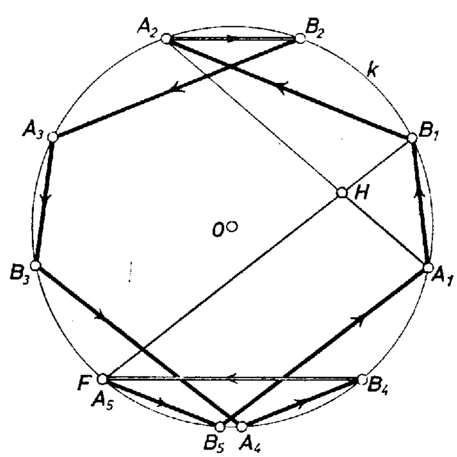
$$A_1B_1 = \frac{B_1A_2}{2} = \frac{D_1D_2}{1+\sqrt5} = D_1D_2\frac{\sqrt5-1}{4} = D_1D_2\,\sin 18^\circ = D_2M,$$

ahol M és D_1 csúcs vetülete a D_2D_4 átlón. Ezt a szakaszt kell felmérnünk egy $D_1\ldots D_5$ szabályos ötszög oldalaira a felezőpontjukból mindkét irányban. Ha e segédötszöget mindjárt egy a k-val koncentrikus körben szerkesztettük meg, akkor csak rá kell vetítenünk a felmért szakaszok végpontjait a középpontból a körre.

Megjegyzés. Könnyű látni, hogy D_2M ismételt fölmérése helyett párhuzamos egyenesek rajzolásával is kimetszhetjük az A_i, B_j csúcsokat: megindulásként M-en át D_3D_2-vel és D_3D_4-gyel, majd A_2-n, B_3-on, A_5-ön és B_2-n át más ötszögoldalakkal.

Egy más lehetőség: az O körüli, A_2-n átmenő kör egy csapásra kimetszi a $D_1\ldots D_5$, ötszög kerületéből a nagyítandó pontokat (de a metszés lapos, fennáll a pontatlanság veszélye).

IV. megoldás. A 4. ábra az I. megoldás elve alapján olyan 10-szöget mutat be, amelyben mind a hosszabb, mind a rövidebb oldalt 4-szer a pozitív forgási irányban mértük fel, 1-szer az ellentétes irányban: $(4-1)(\alpha+\beta) = 360^\circ, \alpha+\beta = 120^\circ$.



4. ábra

[1] K. M. L. 43 (1971) 15.