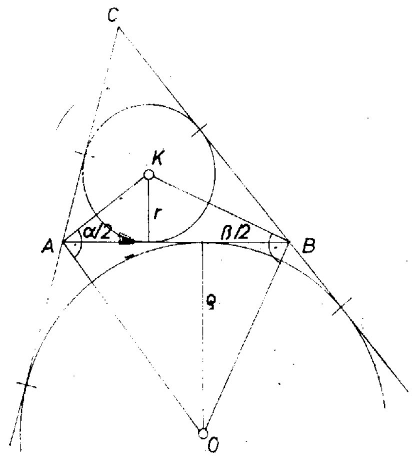
Jelöljük az ABC háromszögbe írt kör középpontját K-val, az AB oldalhoz tartozó hozzáírt kör középpontját O-val. Mivel az ABK, ABO háromszögek magassága rendre r és ϱ, azért az r/ϱ hányados egyenlő e két háromszög területének a hányadosával. Jelöljük az ABC háromszög A-nál és B-nél levő szögét a szokásos módon α-val és β-val, akkor az ABK háromszögben az AB alapon levő szögek nagysága $\alpha/2$ és $\beta/2$, tehát ennek a háromszögnek a területe



$$t_{ABK}=AB^2\frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}}{2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right)}.$$

Az ABO háromszögben $BAO\sphericalangle=90^\circ-\dfrac{\alpha}{2}$, $ABO\sphericalangle=90^\circ-\dfrac{\beta}{2}$,
tehát

$$t_{ABO}=AB^2\frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}}{2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right)},$$

és ezek szerint

$$\frac{r}{\varrho}=\frac{t_{ABK}}{t_{ABO}}=\frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Ez az eredmény természetesen értelemszerűen módosítva érvényes minden háromszögre (bármely háromszögben a beírt kör sugarának és az egyik – alapnak választott – oldalhoz hozzáírt kör sugarának a hányadosa egyenlő az alapon levő szögek felének a tangenséből képzett szorzattal). Így az AMC és BMC háromszögekben

$$\frac{r_1}{\varrho_1}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{AMC\sphericalangle}{2},\qquad \frac{r_2}{\varrho_2}=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{BMC\sphericalangle}{2}.$$

Mivel az AMC és BMC szögek egymást 180°-ra egészítik ki, azért $\dfrac{1}{2}AMC\sphericalangle$ és $\dfrac{1}{2}BMC\sphericalangle$ egymás pótszögei, és így

$$\operatorname{tg}\frac{AMC\sphericalangle}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{BMC\sphericalangle}{2}=1,$$

tehát $\dfrac{r_1}{\varrho_1}$ és $\dfrac{r_2}{\varrho_2}$ szorzata valóban egyenlő $\dfrac{r}{\varrho}$-val.

Megjegyzések. 1. A háromszög oldalai, az érintő körök sugarai és a terület között fennálló összefüggések segítségével belátható, hogy a feladat állítása ekvivalens az ún. Stewart-tétellel, mely szerint

$$AC^2\cdot MB+BC^2\cdot AM=(MC^2+AM\cdot MB)AB.$$

Az ehhez szükséges algebrai átalakítások azonban nem érik meg a fáradságot, mert a Stewart-tételt körülbelül ugyanolyan nehéz bizonyítani – ha nem nehezebb mint a feladatban szereplő összefüggést.

2. A feladat állításából triviálisan következik az alábbi általánosítás. Ha $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_k$ egy egyenes egymást követő pontjai, C az egyenesen kívül levő pont, r_i és ϱ_i az $A_{i-1}A_iC$ háromszögbe, ill. az $A_{i-1}A_i$ oldalhoz írt kör sugara $(i-1,\ 2,\ \ldots,\ k)$, r és ϱ az A_0A_kC háromszögbe, ill. az A_0A_k oldalhoz írt kör sugara, akkor

$$\frac{r_1}{\varrho_1}\cdot\frac{r_2}{\varrho_2}\cdot\ldots\cdot\frac{r_k}{\varrho_k}=\frac{r}{\varrho}.$$