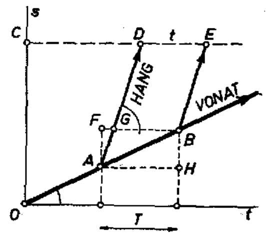
Az I. forduló feladatai

1. *Vasútvonal mellett álló pályaőrhöz vonat közeledik v sebességgel. Sípjelet ad le T ideig. Mennyi ideig hallja a pályaőr a sípjelet? A hang sebessége* $c = 330$ m/s; $v = 108$ km/ra $= 30$ m/s, $T = 3$ s; *a sípjel végéig a vonat nem éri el a pályaőrt.*

(Párkányi László)



1. ábra

Megoldás. A vonat és a hang mozgását ábrázoljuk grafikusan (1. ábra). A vonat s útját mint t idő függvényét az OAB egyenes tünteti fel; ez az egyenes a t-tengellyel v tangensű szöget zár be. A sípolás A-ban kezdődik és a hanghullám útját AD egyenes tünteti fel; $\operatorname{tg} DAH\sphericalangle = c$. A sípjel vége B pontból indul. A sípjel vonaton mért időtartama $AH = T$. Az origótól OC távolságban levő pályaőr a sípjelet $DE = t$ időtartamig hallja. A derékszögű háromszögeket felhasználó számolás:

$$\begin{aligned} t = DE = FB - FG = AH - FG = T - AF \cdot \operatorname{ctg} FGA\sphericalangle = \\ = T - BH/\operatorname{tg} DAH\sphericalangle = T - AH \cdot \operatorname{tg} BAH\sphericalangle/\operatorname{tg} DAH\sphericalangle = \\ = T - Tv/c = T(1 - v/c). \end{aligned}$$

Számadatainkkal, mivel $v/c = 1/11$, ezért $t = 10T/11 = 2{,}727$ s.

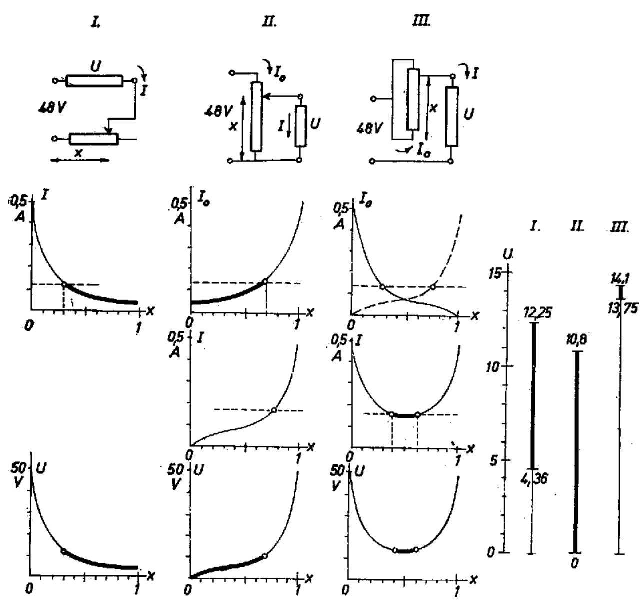
A számítás tartalmazza a Doppler-jelenség egyik esetének levezetését, mert a pályaőr ugyanannyi rezgést kap t idő alatt, amennyit a síp T idő alatt bocsátott ki, tehát az észlelt hangmagasság T/t arányában megnagyobbodik.

2. 100 ohmos, 2 wattos *fogyasztót változtatható feszültséggel akarunk működtetni. Felhasználható tetszés szerinti kapcsolásban egy háromkivezetéses tolóellenállás, amely* 1000 ohmos *és* 15 wattal *terhelhető, valamint egy elhanyagolható belső ellenállású,* 48 voltot *adó feszültségforrás. Milyen határok között változtathatjuk a fogyasztóra jutó feszültséget?*

(Nagy László)

Megoldás. A fogyasztót legfeljebb $I = \sqrt{N/R} \approx \sqrt{2/100} = 0{,}141$ amperrel terhelhetjük; a tolóellenálláson legfeljebb $I_0 = \sqrt{15/1000} = 0{,}1225$ amper mehet át károsodás nélkül. A fogyasztóra eszerint legfeljebb $100 \cdot 0{,}141 = 14{,}1$ volt juthat.

A tolóellenállás csúszó érintkezőjének állását egy bizonyos x törtszám jellemzi, amely megadja, hogy az ellenállás hányadrésze van az egyik végső kivezetés és a csúszó érintkező között, $0 < x < 1$. A tolóellenállás egyik részének $1000x$, másik részének $1000\,(1 - x)$ az ellenállása. Minden elektromos mennyiséget x függvényeként számolunk.



2. ábra

I. Előtétellenállás (2. ábra I. oszlopa). A tolóellenállás $1000x$ ohmja és a fogyasztó 100 ohmja sorba van kapcsolva. A közös áramerősség:

$$I = \frac{48}{100 + 1000x}.$$

A fogyasztóra jutó feszültség: $U = 100I$. A beállítást a tolóellenállás teherbírása korlátozza, a csúszó érintkező $x = 0{,}292$ és $x = 1$ között állhat, miközben a feszültség 12,25 V és 4,36 V között változik.

II. Feszültségosztó (2. ábra II. oszlopa). A tolóellenállás $1000x$ ohmja és a 100 ohmos fogyasztó párhuzamosan vannak kapcsolva és eredő ellenállásukkal van sorba kötve a tolóellenállás felső részének $1000(1-x)$ ohmja. Ezek alapján a feszültségosztó felső részén átmenő áramerősség:

$$I_0 = 0{,}048 \cdot \frac{1 + 10x}{1 + 10x - 10x^2},$$

a fogyasztó áramerőssége:

$$I = 0{,}48 \cdot \frac{x}{1 + 10x - 10x^2}.$$

A fogyasztóra jutó feszültség most is $U = 100I$. A beállítást ismét a tolóellenállás teherbírása korlátozza, a csúszó érintkező $x = 0$ és $x = 0{,}696$ között állhat, miközben a feszültség 0 V és 10,8 V között változik.

III. Vegyes kapcsolás (2. ábra III. oszlopa). A tolóellenállás két szélét összekötve kapcsoljuk a feszültségforrás egyik végére, és a fogyasztót a csúszó érintkező és a feszültségforrás másik vége közé kapcsoljuk. Minden adat az $x = 0{,}5$-es beállításhoz képest szimmetrikus. A tolóellenállás két része párhuzamosan van kapcsolva, és ezzel van sorba kötve a fogyasztó. A tolóellenállás egyik részének áramerőssége:

$$I_0 = \frac{0{,}48(1-x)}{1 + 10x(1-x)},$$

a fogyasztó áramerőssége:

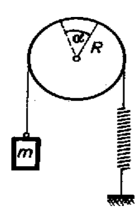
$$I = \frac{0{,}48}{1 + 10x(1-x)}.$$

A fogyasztóra jutó feszültség természetesen most is $U = 100I$. Ez esetben a beállítást a fogyasztó teherbírása korlátozza, a csúszóellenállás $x = 0{,}4$ és $x = 0{,}6$ között állhat, miközben a fogyasztóra jutó feszültség szélső értékei 13,75 V (ha $x = 0{,}5$) és 14,1 V (ha $x = 0{,}4$ vagy $x = 0{,}6$).

A 2. ábra jobb oldali szélső oszlopa a felhasználható feszültségek áttekintését adja meg. 0-tól 4,36 V-ig csak a II. kapcsolással, 4,36 V-tól 10,8 V-ig akár I., akár II. kapcsolással juthatunk el; 10,8 V-tól 12,25 V-ig csak az I. kapcsolás használható. 12,25 V és 13,75 V közötti értéket nem tudunk beállítani, azután 13,75 V és 14,1 V közötti területet a III. kapcsolással érhetünk el.

3. *Vízszintes tengely körül forgatható R rádiuszú, I tehetetlenségi nyomatékú korongot rugó tart egyensúlyi helyzetben úgy, hogy a rugó forgatónyomatéka arányos a szögelfordulással. A korong kerületére fonalat tekerünk, a fonál végére m tömeget akasztunk (3. ábra). Milyen mozgást végez a rendszer, ha kis mértékben kimozdítjuk egyensúlyi helyzetéből? A súrlódástól és közegellenállástól eltekintünk.*

(Wiedemann László)



3. ábra

Megoldás. A forgatónyomaték arányos a szögelfordulással: $k\alpha$. A teljes tehetetlenségi nyomaték $I + mR^2$, mert m tömeg úgy mozog, mintha a korong kerületén lenne. A forgómozgás alaptörvénye szerint β szöggyorsulás:

$$\beta = \frac{-k\alpha}{I + mR^2}.$$

Ha R-rel bővítünk, β szöggyorsulásból $\beta R = a$, a kerületi pont gyorsulása lesz. Ugyanekkor $\alpha R = s$ a kerületi pont útját jelenti (α mindvégig radiánban mérendő). Ezért:

$$a = \frac{-ks}{I + mR^2}.$$

A gyorsulás arányos az úttal és visszafelé mutat, tehát rezgőmozgás keletkezik. Egybevetve a rezgő mozgás $a = -\omega^2 s$ törvényével,

$$\omega^2 = \frac{k}{I + mR^2},$$

így a lengésidő:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I + mR^2}{k}}.$$

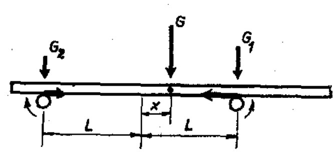
Homogén, M tömegű henger esetében $I = MR^2/2$. A keletkező rezgés gyorsulása abszolút értékben ne legyen nagyobb, mint g nehézségi gyorsulás, különben a fonál nem marad feszes és m tömeg ugrál. A megengedhető legnagyobb amplitúdó:

$$\alpha = \frac{g(I + mR^2)}{kR}.$$

A II. forduló feladatai

1. *Két egyenlő sugarú kis henger egymással szemben gyorsan forog, párhuzamos tengelyeik ugyanabban a vízszintes síkban vannak. A tengelyek távolsága $2L$. Helyezzünk a két hengerre a tengelyekre merőlegesen homogén tömegeloszlású lécet úgy, hogy a léc súlypontja a két henger merőleges távolságát merőlegesen felező síktól x távolságban legyen. Milyen mozgást végez a magára hagyott léc?*

(Párkányi László)



4. ábra

Megoldás. A léc $G = mg$ súlyából a tengelyekre jutó összetevők (4. ábra):

$$G_1 = G \cdot \frac{L + x}{2L}, \qquad G_2 = G \cdot \frac{L - x}{2L}.$$

Mivel a hengerek gyorsan forognak, feltétlenül van sebességkülönbség a léc és a hengerek felülete között, ezért μG_1 és μG_2 súrlódási erők lépnek fel úgy, hogy a léc közepe felé mutatnak (μ a súrlódási együttható). Mivel μG_1 nagyobb, mint μG_2, ezért $\mu G_1 - \mu G_2 = \mu(G_1 - G_2) = \mu mgx/L$ erő viszi vissza a lécet szimmetrikus helyzetébe. Ez az erő arányos a nyugalmi helyzettől mért távolsággal, ezért rezgőmozgás keletkezik. A mozgató erő:

$$P = -\frac{\mu mg}{L} \cdot x,$$

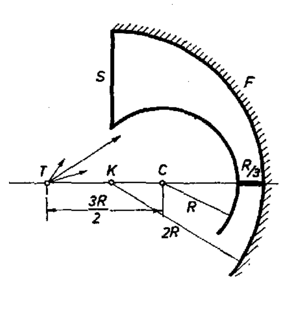
egybevetve a rezgőmozgás $P = -m\omega^2 s$ erőtörvényével (s az út): $\omega = \sqrt{\mu g/L}$ és a rezgésidő:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\mu g}}.$$

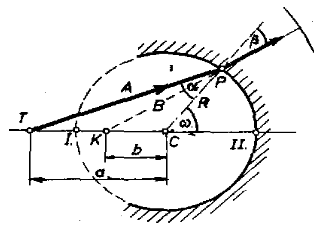
Eredményünk bizonytalanná válna, ha olyan nagy amplitúdóval kezdenénk a mozgást, hogy a léc sebessége a közép felé haladva elérné a hengerek kerületi sebességét, ugyanis ekkor, megszűnvén a sebességkülönbség, nem lehetünk abban biztosak, hogy a keletkező súrlódási erők μG_1, illetve μG_2.

2. $n = 1{,}5$ *törésmutatójú üvegből elkészítjük az 5. ábrán keresztmetszetben látható vastag üveglencsét, melynek belső rádiusza R, külső rádiusza $2R$, tengelymenti vastagsága $R/3$. A külső F gömbfelületet fémbevonattal tükrözővé, az S síkfelületet koromréteggel fényelnyelővé tesszük. A tengelyen C középponttól $3R/2$ távolságban T pontszerű fényforrást helyezünk el. Erről a tárgyról milyen képet ad az optikai rendszer?*

(Bodó Zalán)



5. ábra



6. ábra

Megoldás. Foglalkozzunk először a belső gömbfelülettel (6. ábra). T-ből P-be levegőben érkező fénysugár P-ben ér az üvegfelülethez; beesési merőlegese CP rádiusz, beesési szöge α, törési szöge β. A megtört sugár úgy halad az üvegben, mintha K-ból jönne. A TCP háromszögből sinus-tétellel: $a/A = \sin\alpha/\sin\omega$, azután KCP háromszögből $b/B = \sin\beta/\sin\omega$ és egyenleteink osztásával, mivel $\sin\alpha/\sin\beta = n$ a törésmutató:

$$\frac{a}{b} = n \cdot \frac{A}{B}.$$

Képalkotás csak akkor lehetséges, ha a legkülönbözőbb irányokban induló fénysugarak esetében a/b állandó marad. Ehhez az szükséges, hogy bárhol legyen is P pont, az A/B hányados állandó legyen. Tehát az R rádiuszú kör T és K pontok számára Apollonius-kör.

T és K helyének, vagyis a, b távolságoknak meghatározására vigyük P pontot először I.-be, azután II.-be:

$$\frac{a}{b} = n \cdot \frac{a-R}{R-b},$$
$$\frac{a}{b} = n \cdot \frac{a+R}{R+b}.$$

Egyenletrendszerünk megoldása:

$$a = nR,$$
$$b = \frac{R}{n}.$$

(Egyébként ezek szerint $A/B = n$, $a/b = n^2$.)

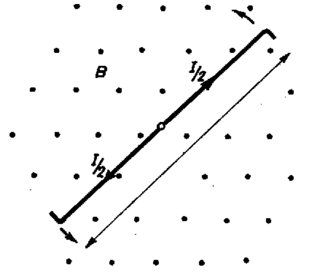
Ha tehát T pontot úgy helyezzük el, hogy $a = nR$ legyen, akkor a gömbfelület bármely pontja felé haladó fénysugár úgy törik meg az üvegben, mintha K-ból indult volna ki, amelyre nézve $b = R/n$. K pont T-nek a képe. Ez minden közelítés nélkül, bármilyen nagy nyílásszögű sugárnyalábra érvényes. Minden gömb alakú törőfelület esetén létezik ilyen két pont, nevük Abbe-féle aplanatikus pontpár. De ha T-vel vagy K-val kilépünk a tengelyből, fellépnek a lencsehibák. Méginkább akkor, ha más, a leképezési távolságtörvénynek eleget tevő T, K pontpárt választunk.

Feladatunk számadatai mellett T és K az 5. ábrán aplanatikus pontpár, mert $TC = 3R/2$ és $KC = 2R/3$ ($n = 3/2$). Ha K mint középpont körül akármilyen rádiusszal (például $2R$-rel) rajzolunk egy második gömbfelületet, akkor, az üvegben haladó fénysugár merőlegesen esik a külső gömbfelületre, önmagába verődik vissza és visszatér T-be. Ez akármilyen nagy nyílásszögnél igaz. Ha T-be véges méretű tárgyat helyezünk, akkor ennek reális, fordított, eredeti nagyságú képe keletkezik K-ban, de ez a kép csak akkor lesz a lencsehibáktól tűrhetően mentes, ha a tengely mentén haladó, kis nyílásszögű nyalábot használunk.

3. *Egyenes l hosszúságú vízszintes vezető a közepén átmenő függőleges tengely körül súrlódásmentesen foroghat. A vezető két vége higanykádba merül, ahol a bemerülő vezetékdarabokra együttesen k_1v^2, a v sebesség négyzetével arányos közegellenállási erő hat. Függőlegesen homogén mágneses tér van jelen. A higanykádon és a tengelyen áramot vezetünk át, amelyet változtatható ellenállással állandóan I amper erősségen tartunk. Minden ohmos ellenállás és a levegő közegellenállása elhanyagolható. Mekkora egyenletes szögsebességgel forog a vezető? Mekkora ekkor a feszültségkülönbség a tengely és a higanykád között? Adatok:* $l = 20$ cm, $k_1 = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$ kg/m, $I = 4$ amper, *a mágneses tér indukciója* $B = 5 \cdot 10^{-2}$ Vs/m^2.

(Nagy László)

Megoldás. A vezető olyan nagy szögsebességre gyorsul fel, hogy a mágneses erő forgatónyomatéka egyenlő lesz a közegellenállási erő forgatónyomatékával.



7. ábra

Haladjon az áram a tengelytől a forgó vezető két vége felé $I/2$ és $I/2$ áramerősséggel. A 7. ábra felülnézetet tüntet fel. Ha a mágneses tér felülről lefelé hat, akkor a vezető az óramutató járásával ellentétesen forog felülről nézve. k_1v^2 közegellenállási erő forgatónyomatéka $k_1v^2l/2$. Ha figyelembe vesszük, hogy v valóságos sebesség kifejezhető ω szögsebességgel $v = \omega l/2$ szerint, akkor a közegellenállási erő forgatónyomatéka:

$$\frac{k_1\omega^2l^3}{8}.$$

A mágneses tér a vezető egyik, $l/2$ hosszúságú felére

$$B \cdot \frac{I}{2} \cdot \frac{l}{2}$$

erőt fejt ki. Átlagos erőkarnak $l/2$ fél dróthossz fele, vagyis $l/4$ veendő, így a fél drótra ható mágneses forgatónyomaték:

$$B \cdot \frac{I}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4}.$$

Az egész drótra ható mágneses forgatónyomaték:

$$2B \cdot \frac{I}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{BIl^2}{8}.$$

A forgatónyomatékokat egyenlővé téve:

$$\frac{k_1\omega^2l^3}{8} = \frac{BIl^2}{8}.$$

Innen a keresett szögsebesség:

$$\omega = \sqrt{\frac{BI}{k_1l}}.$$

Számadataink szerint $I = 4$ A, $B = 0{,}05$ Vs/m^2, $l = 0{,}2$ m, $k_1 = 0{,}00625$ kg/m és a szögsebesség $\omega = 12{,}65\ \mathrm{s}^{-1}$ A fordulatszám $n = 2{,}013\ \mathrm{s}^{-1}$.

A tengely és a higanykád között mért feszültségkülönbség csak az indukált feszültség lehet, mivel egyetlen alkatrésznek sincs ohmos ellenállása. v sebességgel mozgatott L hosszúságú vezetőben az indukált feszültség:

$$U = BvL.$$

A sebesség átlagosan az $l/4$ távolságban levő sebesség, vagyis $\omega l/4$. A dróthossz $l/2$. A forgó drót két fele párhuzamosan van kapcsolva, tehát feszültségük nem összegeződik. Az indukált feszültség:

$$U = \frac{B\omega l^2}{8}.$$

$B = 0{,}05$ Vs/m^2, $l = 0{,}2$ m és ω előbbi értékének felhasználásával $U = 3{,}16 \cdot 10^{-8}$ volt. A kísérlet az ún. unipoláris indukció egy példája, ahol az indukált feszültség nagyság és előjel szerint állandó.

Az 1967. évi fizikai tanulmányi verseny eredménye:

I. díj: *Marossy Ferenc* (Budapest, Fazekas M. g. III. o. t.)
II. díj: *Szalay Sándor* (Debrecen, Kossuth g. IV. o. t.)
III. díj: *Babai László* (Budapest, Fazekas M. g. III. o. t.)

A további helyezettek: 4. *Takács László* (Sopron, Széchenyi g. III. o. t.), 5. *Palla László* (Budapest, Piarista g. IV. o. t.), 6. *Grósz Tamás* (Budapest, Ságvári E. g. III. o. t.), 7. *Bor Zsolt* (Szeged, Ságvári E. g. IV. o. t.), 8. *Jánosy János* (Budapest, Táncsics g. IV. o. t.), 9. *Járai Antal* (Debrecen, Vegyipari Technikum III. o. t.), 10. *Augusztinovicz Fülöp* (Sopron, Széchenyi g. IV. o. t.).