I. megoldás. A halmaz kívánt felbontását úgy értjük, hogy a halmaz minden egyes eleme szerepel vagy az egyik, vagy pedig a másik részhalmazban.

6 egymást követő természetes szám közül legföljebb egy osztható a 7-es törzsszámmal, mert ha egy m szám osztható vele, akkor a 7-tel osztható, hozzá legközelebbi számok $m-7$ és $m+7$. Ebből következik, hogy a keresett halmaz egyik eleme sem osztható 7-tel, különben az egyik részhalmaz elemeinek szorzata osztható volna vele, a másikéié nem, így pedig nem lehetnének egyenlők. Csak olyan számhatosokról lehet tehát szó, amelyeknek egymás utáni elemei 7-tel osztva rendre 1-et, 2-t, …, 6-ot adnak maradékul.

Így a két részhalmaz szorzatainak szorzata csak

$$(7k+1)(7k+2)(7k+3)(7k+4)(7k+5)(7k+6) = 7K + 6! = 7K + 720 = N^2$$

alakú lehet (betűkkel itt mindig természetes számot jelölünk), ahol N az egyik-egyik részhalmaz elemeinek szorzata; ennélfogva N^2-et 7-tel osztva 6-ot kell kapnunk (legkisebb pozitív) maradékul, mert ennyi a 720 maradéka.

Ilyen négyzetszám viszont nincs, mert a 7-tel való oszthatóság szempontjából minden természetes szám beletartozik a

$$7j, \quad 7j \pm 1, \quad 7j \pm 2, \quad 7j \pm 3$$

alakok valamelyikébe, és eszerint a négyzetét 7-tel osztva rendre 0, 1, 4, ill. 9, azaz 2 a maradék.

Eszerint egyetlen természetes számnak sincs meg a kívánt tulajdonsága.

Hosszú Ferenc (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. A halmaz elemei közt van 5-tel osztható, ezért az egyik részhalmaz elemeinek szorzata osztható vele. Avégett, hogy a másik szorzat is osztható legyen 5-tel, az elemek közt még egy másiknak is oszthatónak kell lennie vele. E két szám különbsége 5, tehát csak n és $n+5$ lehetnek ezek, és a közbülső négy szám egyike sem osztható 5-tel.

A közbülső számok közül kettő páros, kettő páratlan. Az utóbbiak közül legföljebb az egyik osztható 3-mal – hiszen különbségük 2 – ennek a számnak a legkisebb prímosztója tehát legalább 7. Ez az osztó nem fordulhat elő a halmaz még egy elemében, a kívánt csoportosítás tehát egyetlen természetes szám mellett sem létezik.

Földes Tamás (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o.t.)

III. megoldás. A föntiek szerint a halmaz elemeinek egyike sem osztható 7-tel, sem nagyobb prímszámmal, így különböző alapú prímszámhatványok szorzataiként való előállításukban csak a 2, 3 és 5 prímek léphetnek föl. Ugyanez áll a két részhalmaz N^2 szorzatára is, és ebben minden kitevő páros.

Az 5 kitevője N^2-ben 2, azaz sem n, sem $n+5$ nem osztható 5^2-nel, különben az egyik részhalmazból képezett szorzat osztható volna 5^2-nel, a másik nem, hiszen egy 5^2-nel osztható m számhoz a legközelebbi, 5^2-nel oszthatók $m \pm 25$. – Ugyanígy 3-nak is 2 a kitevője N^2-ben.

A halmaz elemei közül három páros, de közülük legalább egy osztható 4-gyel, így 2 kitevője legalább 4, továbbá páros. Lehet még 6 is, ha ti. a párosok legkisebbike vagy legnagyobbika osztható 8-cal, mert így a 4-gyel nagyobb, ill. kisebb elem osztható 4-gyel, ami – a hátra levő párossal szorozva oszthatóvá teheti a másik szorzatot is 8-cal. 6-nál több azonban a föntiekhez hasonlóan nem lehet 2 kitevője.

Ezek szerint N^2 értéke vagy $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 3600$, vagy ennek 4-szerese, $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 14\,400$.

Mármost a

$$P_n = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

sorozat szigorúan monoton nő, hiszen tagjai pozitívok, és egy tagjának és az előzőnek a hányadosa

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{n+6}{n} > 1,$$

másrészt $P_1 = 6! = 720$, $P_2 = 7! = 5040$, $P_3 = 8!/2 = 20\,160$, nincs tehát olyan n, amelyre P_n értéke 3600 vagy 14 400 volna; a kívánt tulajdonsága nincs meg egyetlen természetes számnak sem.

IV. megoldás. Azt mutatjuk meg, hogy a 6 elem szétosztása a két részhalmazra sem 5 : 1, sem 4 : 2, sem 3 : 3 arányban[1] nem lehetséges.

Nem lehet az arány 5 : 1, mert $n = 1$ esetén a legnagyobb elem kisebb a többi elem szorzatánál: $6 < 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$; $n > 1$ esetén pedig mára második és harmadik elem szorzatánál is, hiszen

$$(n+1)(n+2) - (n+5) = (n-1)(n+3) > 0, \quad \text{ha} \quad n > 1. \tag{1}$$

Nem lehet 4 : 2 sem az eloszlás, mert $n = 1$ esetén $6 \cdot 5 > 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, és $6 \cdot 4 < 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, tovább pedig (1) és a hasonlóan adódó (2) szerint

$$\begin{aligned} n+5 &< (n+1)(n+2), \\ n+4 &< n(n+3), \end{aligned} \tag{2}$$

[1] Az „arány” szót itt abban az értelemben használjuk, mint a sporteredményekben szokásos, vagyis a kettőspont csupán elválasztó a két „létszám” között.

tehát a legnagyobb két számszorzata kisebb, mint a többi négyé; ugyanis

$$n(n+3)-(n+4)=n^2+2n-4=(n+1)^2-5>0, \quad \text{ha} \quad n \geqq 2.$$

Végül a $3:3$ arány lehetetlen volta abból adódik, hogy a II. megoldás szerint n az egyik, $n+5$ a másik részhalmazba tartozik az 5-tel való oszthatóság alapján, így pedig az utóbbi halmazbeli elemek szorzatának alsó korlátja nagyobb, mint az előbbi halmazbeli elemek szorzatának felső korlátja:

$$(n+5)(n+1)(n+2)-n(n+3)(n+4)=2(n+5)+n(n+3)\big[(n+5)-(n+4)\big]=$$
$$2(n+5)+n(n+3)>0.$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Farkas Gábor (Budapest, Eötvös J. Gimn., IV. o. t.)