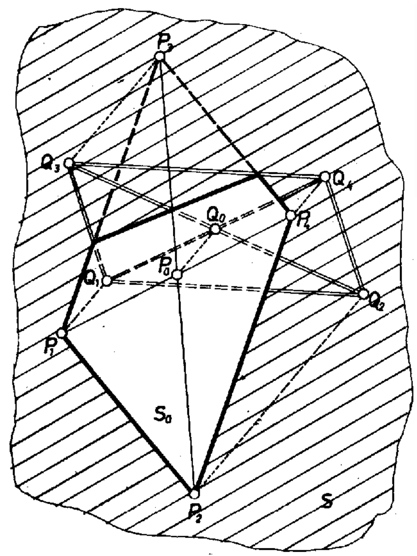
Tartsuk vízszintesen a $P_1P_2P_3P_4$ négyzet S_0 síkját, jelöljük G_i-vel a P_i körüli, i egységnyi sugarú gömböt ($i = 1, 2, 3, 4$). Az S_0 egy tetszőleges P pontjának egy S síktól mért előjeles távolságán magát a PQ szakaszt értjük, ahol Q a P vetülete S-en –, ha Q az S_0 fölött van, ha pedig Q az S_0 alatt van, akkor negatívnak tekintjük PQ-t. Jelöljük négyzetünk középpontját P_0-lal, P_i-nek S-től mért előjeles távolságát $d_i(S)$-sel, a P_iQ_i egyenest e_i-vel ($i = 0, 1, 2, 3, 4$). Bebizonyítjuk, hogy

$$d_1(S) + d_4(S) = d_2(S) + d_3(S), \tag{1}$$

annak belátásával, hogy mindkét oldal $2\,d_0(S)$-sel egyenlő.



1. ábra

Az e_1, e_4 és e_0 egyenesek párhuzamosak és metszik a P_1P_4 egyenest, egy síkban vannak és Q_0 nyilvánvalóan felezi a Q_1Q_4-et (1. ábra), emiatt

$$\overrightarrow{P_0Q_0} = \overrightarrow{P_1Q_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{Q_1Q_4} - \overrightarrow{P_1P_4}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{P_1Q_1} + \overrightarrow{Q_1Q_4} + \overrightarrow{P_4P_1}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1Q_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_4Q_4} + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1Q_1},$$

vagyis

$$\overrightarrow{P_1Q_1} + \overrightarrow{P_4Q_4} = 2\overrightarrow{P_0Q_0}.$$

Innen

$$d_1(S) + d_4(S) = 2\,d_0(S), \qquad \text{és ugyanígy}$$
$$d_2(S) + d_3(S) = 2\,d_0(S).$$

Mivel P_i-nek S-től mért távolsága $|d_i(S)|$, azért S akkor és csakis akkor érinti G_i-t, ha

$$|d_i(S)| = i, \tag{2}$$

míg ha ehelyett

$$|d_i(S)| < i, \tag{3}$$

akkor S metszi G_i-t, ha pedig

$$|d_i(S)| > i, \tag{4}$$

akkor S-nek nincs közös pontja G_i-vel, kívül halad rajta.

Ha ármost S érinti – mondjuk – a G_1, G_2, G_3 gömböket, akkor d_1, d_2, d_3 abszolút értéke rendre 1, 2, 3 előjeleik megválasztására pedig $2\cdot 2\cdot 2 = 8$ lehetőségünk van. Persze négy gömb közül hármat még 3-féleképpen választhatunk, az így szóba jövő eseteket táblázatunkban mutatjuk be. Ebben csillag áll annak a d_i-nek a helyén, amelyik nem szerepel a választott és előjellel ellátott három között, a megfelelő gömbközéppontnak a másik háromhoz tartozó érintősíktól mért távolságát (1) alapján a d-vel jelölt oszlopban adtuk meg, és ennek, valamint (2)–(4)-nek alapján azt is eldöntöttük, milyen a negyedik gömbnek és a választott három gömböt érintő síknak a kölcsönös helyzete.

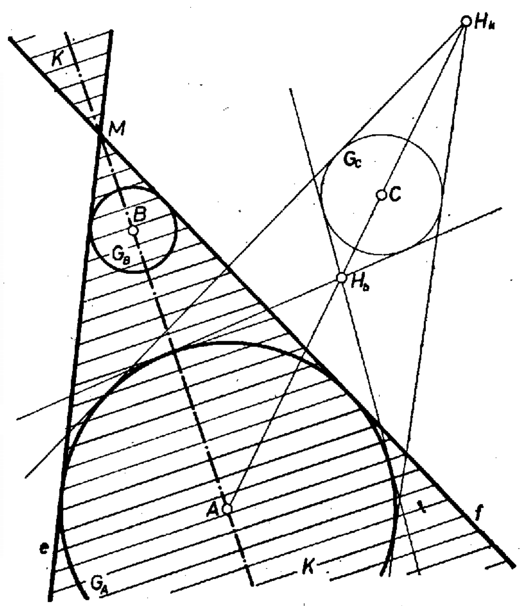
d_1	d_2	d_3	d_4	d			
1	2	3	*	4	érint		
1	2	-3	*	-2		metsz	
1	-2	3	*	0		metsz	
1	-2	-3	*	-6			nem metsz
1	2	*	4	3	érint		
1	2	*	-4	-5			nem metsz
1	-2	*	4	-7			nem metsz
1	-2	*	-4	-1		metsz	
1	*	3	4	2	érint		
1	*	3	-4	-6			nem metsz
1	*	-3	4	8			nem metsz
1	*	-3	-4	0		metsz	
*	2	3	4	1	érint		
*	2	3	-4	9			nem metsz
*	2	-3	4	-5			nem metsz
*	2	-3	-4	3			nem metsz

A táblázat 16 esetéből a hátralevő 16 esetet úgy kapjuk, hogy a megválasztott, illetve kiszámított számok mindegyikét (-1)-gyel megszorozzuk (ezzel tulajdonképpen tükrözzük a mindenkori S-et S_0-ra).

Négyszer kaptuk azt, hogy a negyedik gömb érinti a szóban forgó síkot, vagyis a sík mind a négy gömböt érinti, ez azonban egyetlen esetet jelent, azt, amikor az előjeles távolságok értéke rendre $(1, 2, 3, 4)$; így a táblázat 13 esetet jelent, összesen tehát $2 \cdot 13 = 26$, a feladatban kívánt tulajdonságú érintő sík lehet, ezek közül $2 \cdot 4 = 8$ metszi a negyedik gömböt, 2 pedig érinti a negyediket is.

Be kell még látnunk, hogy a táblázatban feltüntetett esetek mindegyikének pontosan egy sík felel meg. Ez könnyen következik az alábbi állításból.

Legyen A és B az S_0 sík tetszőleges pontja, és írjunk A körül a sugárral, B körül b sugárral egy–egy gömböt, jelöljük ezeket G_A-val és G_B-vel, az S_0 alkotott metszésvonalukat k_A-val és k_B-vel. Tegyük fel, hogy k_A és k_B közül egyik sincs a másik belsejében, és nincs közös pontjuk. Rajzoljuk meg S_0-ban k_A és k_B közös külső érintő egyeneseit, és jelöljük ezek metszéspontját M-mel, az általuk határolt szögtartományt, és annak M-re vonatkozó tükörképét K-val (2. ábra).



2. ábra

Legyen C az S_0 síknak olyan pontja, hogy a C köré c sugárral írt G_C gömbnek S_0-on levő k_c, köre teljes egészében K-n kívül van. Akkor van olyan S^+, illetve S^--sík, amelynek az A, B, C pontoktól mért előjeles távolsága rendre (a, b, c), illetve $(a, b, -c)$.

Ehhez felsorolunk néhány állítást sík és az iméntiek szerinti kölcsönös helyzetű gömbök érintkezéséről, bizonyításukat azonban részben az olvasóra hagyjuk.

Ha egy S sík két gömböt érint, akkor az érintési ponthoz tartozó sugarak párhuzamosak egymással, hiszen mindkettő merőleges az érintősíkra. S-et közös belső érintősíknak mondjuk, ha szétválasztja a két gömbközéppontot; és közös külső érintősíknak, ha nem választja szét őket, e két esetben a mondott sugarak – mint a gömbközéppontból induló *fél*egyenesek – rendre ellentétes, illetve megegyező irányúak.

Az O_i, O_j középpontú, különböző r_i, r_j sugarú ($r_j > r_i$) G_i, G_j gömbök két különböző centrumra vonatkozóan hasonló helyzetűek egymáshoz. Egymásnak páronként megfelelő pontjaik a párhuzamos és egyirányú sugaraik E_i, E_j végpontjai, illetve a párhuzamos és ellentétes irányú sugaraik F_i, L_j végpontjai. Az ilyen végpontpárokat összekötő E_iE_j, illetve F_iL_j egyenesek valamennyien átmennek az O_iO_j egyenes egy–egy állandó (E_i, ill. F_i megválasztásától független) pontján, ez a gömbjeink K_{ij} külső, ill. B_{ij} belső hasonlósági centruma. Ezek távolsága a két gömbközépponttól a $K_{ij}O_iE_i$ és $K_{ij}O_jE_j$, illetőleg a $B_{ij}O_iF_i$ és $B_{ij}O_jL_j$ hasonló háromszögekből

$$K_{ij}O_v = \frac{O_iO_j}{r_j + r_i} \cdot r_v, \qquad B_{ij}O_v = \frac{O_iO_j}{r_j - r_i} \cdot r_v,$$

ahol $v = i$, j (az indexek valamelyike). B_{ij} az O_iO_j szakaszon van, K_{ij} pedig ennek O_i-n túli meghosszabbításán, és B_{ij} is, K_{ij} is kívül van G_i, G_j mindegyikén.

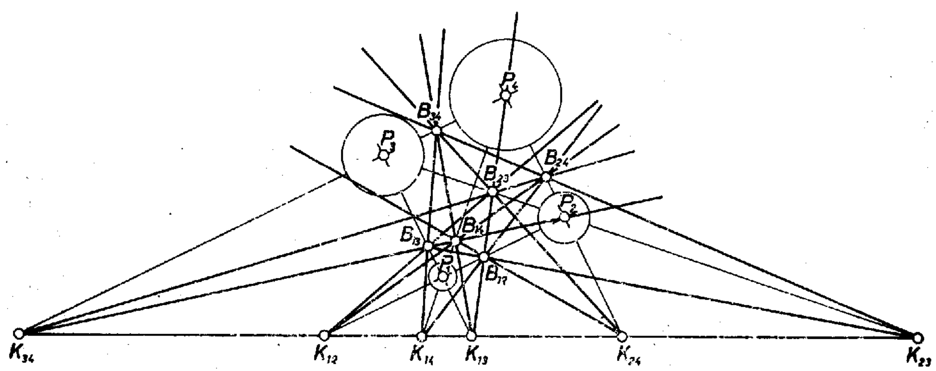
E két gömb bármely közös érintősíkja vagy K_{ij}-n vagy B_{ij}-n átmegy és ennek megfelelően rendre külső, ill. belső közös érintősíkról van szó. – Fordítva, ha egy sík átmegy valamelyik hasonlósági centrumon és érinti a gömbök egyikét, akkor érinti a másik gömböt is. (Mindkét típusú érintősíkból végtelen sok van, ezek egyben egy–egy forgási kúpfelület érintősíkjai, melynek csúcsa K_{ij}, ill. B_{ij} és tengelye az O_iO_j egyenes.)

Most rátérünk a G_A, G_B, G_C gömbökre vonatkozó állításunk bizonyítására. Jelöljük k_A és k_B egyik közös külső érintőjét e-vel, az ezen átmenő, S_0-ra merőleges síkot S-sel, G_A és G_C közös belső hasonlósági centrumát H_b-vel, a külsőt H_k-val. Belátható, hogy ha k_c a K-n kívül van, akkor H_b is, H_k is K-n kívül van (ennek bizonyítását az olvasóra hagyjuk). Forgassuk el S-et az AB egyenes körül úgy, hogy menjen át H_k-n, jelöljük a kapott síkot S_k-val, és forgassuk el úgy is, hogy menjen át H_b-n – ezt a helyzetet jelöljük S_b-sel. (Mivel H_b és H_k a K-n kívül van, az S_k, S_b síkok valóban léteznek.) Az S_k sík érinti G_A-t és átmegy H_k-n, így G_c-t is érinti, és nem választja el egymástól sem G_A-t és G_B-t, sem G_A-t és G_C-t, vagyis a G_A, G_B, G_C gömbök S_k-nak ugyanazon az oldalán vannak. Emiatt az érintési pontokhoz tartozó sugarak S_0-nak ugyanazon az oldalán vannak, tehát S-nek az A, B, C pontoktól mért előjeles távolságai ugyanolyan előjelűek: vagy mind a három pozitív, vagy mind negatív. Ha mind pozitív, akkor készen vagyunk, ha mind negatív, akkor S_k-nak S_0-ra vonatkozó tükörképe a keresett S^+ sík. Mivel az a sík, amelyiknek A-tól B-től, C-től mért előjeles távolsága rendre a, b, c, érinti G_A-t, G_B-t és G_C-t, és ezeket a gömböket nem választja el egymástól, ez a sík csak S_k, vagy annak az S_0-ra vonatkozó tükörképe lehet.

Hasonlóan láthatjuk be, hogy az $(a,\, b,\, -c)$ előjeles távolságokhoz tartozó S^- sík csak S_b vagy annak S_0-ra vonatkozó tükörképe lehet, és hogy e két sík egyikéhez valóban ezek az előjeles távolságok tartoznak.

A feladat megoldását ezzel befejeztük.

Megjegyzés. Több versenyző alapította megoldását a következő síkmértani tételre: ha tekintjük három kör páronként vett belső és külső hasonlósági pontjait, ez a 6 pont hármasával egy–egy egyenesre – a körök hasonlósági tengelyeire – illeszkedik; 4 ilyen tengely van, egyikükön a 3 külső hasonlósági pont van rajta, a többi háromon két körpár belső és egy körpár külső hasonlósági pontja. A hasonlóság azok közt a gömbök közt is fennáll, amelyeknek az előbbi körök főkörei, és a mondott 4 tengely mindegyikén át 2–2 közös érintő síkja megy át a 3 gömbnek, ezek egymás tükörképei a 3 gömbközéppont által meghatározott síkra és más közös érintősíkjuk nincs – hacsak a hasonlósági pontok mind kívül esnek a főkörökön (gömbökön), és ha a 3 gömbközéppont nem esik egy egyenesbe.



3. ábra

Ezeket a tengelyeket tünteti fel a 3. ábra az adott 4 gömb esetére. A centrumok helyzetét megadó fenti képletek szerint a 4 gömbből képezhető 6 párnak a K_{12}, …, K_{34} külső hasonlósági pontjai egy egyenesen vannak, ezen megy át a 4 gömb közös külső érintősíkja, ebben a hármasával vett tengelyek közül 4-esik egybe, másutt nincs tengelyek egybeesése. (Szemléletesen azt jelenti a közös érintősík létezése, hogy a 4 gömböt az előírt helyzetben egymáshoz rögzítve, a rendszer letehető síklapra úgy, hogy mind a 4 gömb támaszkodik a síkra.)