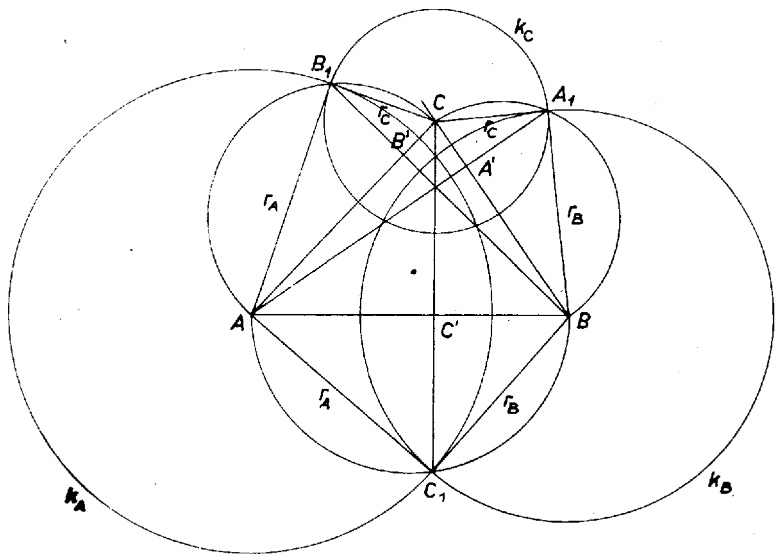
I. megoldás. Jelöljük az adott háromszög csúcsait A, B, C-vel, a keresett köröket rendre k_A, k_B, k_C-vel, sugarukat r_A, r_B, r_C-vel, k_A és k_B egyik metszéspontját C_1-gyel, k_B és k_C, illetve k_C és k_A egyik metszéspontját A_1-gyel, illetve B_1-gyel. Mivel ezek a körök merőlegesen metszik egymást, a CA_1, illetve CB_1 egyenes érinti a k_B, illetve a k_A kört, és $CA_1 = CB_1$. Megmutatjuk, hogy ha a sík tetszőleges P pontjából a k_A, k_B körökhöz húzott érintő szakaszok egyenlőek, akkor PC_1 merőleges AB-re (1. ábra).



1. ábra

Legyen C_1 merőleges vetülete az AB egyenesen C', mivel az ABC_1 háromszögben C_1-nél 90°-os szög van, C' az AB szakaszon van. Jelöljük a P-ből k_A-hoz k_B-hez húzott érintők érintési pontját Q-val, R-rel, a PC_1 egyenesnek a k_A körön levő másik pontját S_1-gyel, a k_B körön levő másik pontját S_2-vel. Ekkor

$$PQ^2 = PC_1 \cdot PS_1, \qquad PR^2 = PC_1 \cdot PS_2,$$

ha tehát $PQ = PR$, akkor $PS_1 = PS_2$. Mivel az S_1, S_2 pontok a PC_1 félegyenesen vannak – hiszen P a körökre nézve külső pont –, ebből következik, hogy S_1 és S_2 azonosak, tehát PC_1 a k_A, k_B köröket ugyanabban a pontban metszi másodszor. Ez a pont csak a k_A, k_B körök C_1-től különböző metszéspontja lehet. És mive1 a k_A, k_B körök két metszéspontját összekötő egyenes merőleges az AB centrálisukra, beláttuk, hogy a P pont rajta van ezen az egyenesen, tehát PC_1 valóban merőleges AB-re.

Hasonlóan látható be állításunk megfordítása is: a k_A, k_B körök közös húrjának meghosszabbításán levő pontokból e körökhöz egyenlő hosszú érintők húzhatók.

Eredményünkből következik, hogy $CC_1 \perp AB$, és CC_1 az AB szakaszt annak belső pontjában metszi. Hasonlóan kapjuk, hogy $BB_1 \perp AC$, $AA_1 \perp BC$, tehát az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek az ABC háromszög magasságvonalai, és a szemközti oldalszakaszokat belső pontban metszik. Emiatt feladatunknak csak akkor van megoldása, ha ABC hegyesszögű háromszög. Ebben az esetben a C_1 pontnak a C-n átmenő magasságon is, az AB feletti Thalész-körön is rajta kell lennie, legyen tehát C_1 e kettő valamelyik metszéspontja. Válasszuk k_A-nak, illetve k_B-nek az A, illetve B körül rajzolt, C_1-en átmenő kört. Mivel $AC_1 \perp BC_1$, azért k_A és k_B merőlegesen metszik egymást. A fentiek szerint C-ből e körökhöz egyenlő nagyságú érintőszakaszokat húzhatunk, jelöljük az érintési pontokat B_1-gyel, illetve A_1-gyel. Mivel $CB_1 = CA_1$, C körül rajzolhatunk A_1-en és B_1-en átmenő kört, legyen ez k_C. Mivel $CB_1 \perp AB_1$ és $CA_1 \perp BA_1$, azért k_C merőlegesen metszi k_A-t, k_B-t.

Hegyesszögű háromszögre tehát feladatunk megoldható, és a megoldás egyértelmű: a keresett köröknek rendre át kell menniük a háromszög magasságvonalainak a szemközti oldalszakaszok feletti Thalész-körökön levő pontjain. Ha pedig a háromszög nem hegyesszögű, akkor a feladatnak nincs megoldása.

Megjegyzések. 1. Azt, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek az ABC háromszög magasságvonalai, a következő térbeli meggondolással is beláthatjuk. Forgassuk ki a síkból az AB_1C, illetve A_1BC háromszögeket AC, illetve BC oldaluk körül addig, amíg a B_1, A_1 csúcsok találkoznak. Könnyen látható, hogy ez valóban bekövetkezik, és ekkor e pont vetülete az ABC háromszög magasságpontja lesz. A találkozási pontból (és a síkra való tükörképéből) a háromszög mindegyik oldala derékszögben látható.

2. Az, hogy a megoldásunkban megszerkesztett körök léteznek, közvetlenül kiolvasható az 1262. gyakorlat[1] állításából. Megoldásunkban ennél többet bizonyítottunk be: azt is megmutattuk, hogy ezek a körök egyértelműen vannak meghatározva.

[1] Lásd K. M. L. 40 (1970) 155. o.

II. megoldás. Ha találunk olyan A_1, B_1, C_1 pontokat, melyekre $AC_1 = AB_1 = r_A$, $BC_1 = BA_1 = r_B$, $CA_1 = r_C$, és az ABC_1, BCA_1, CAB_1 háromszögek derékszögűek, akkor az A, B, C körüli r_A, r_B, r_C sugarú körök merőlegesen metszik egymást. Pitagorasz tétele alapján:

$$\begin{aligned} r_A^2 + r_B^2 &= c^2, \\ r_B^2 + r_C^2 &= a^2, \\ r_C^2 + r_A^2 &= b^2. \end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert az r_A^2, r_B^2, r_C^2 ismeretlenekre megoldva, majd az eredményt a cosinustétel alapján átalakítva kapjuk, hogy

$$(1) \quad \begin{cases} r_A^2 = \dfrac{1}{2}(-a^2 + b^2 + c^2) = bc \cos \alpha, \quad r_B^2 = \dfrac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2) = ac \cos \beta, \\ \\ r_C^2 = \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) = ab \cos \gamma. \end{cases}$$

Feladatunknak ezek szerint csak akkor van megoldása, ha a jobb oldalon pozitív mennyiségek állnak, azaz ha a háromszög mindegyik szöge hegyesszög. Hegyesszögű háromszögben legyen A', B', C' az A, B, C csúcs merőleges vetülete a szemközti oldalon, akkor folytatólag

$$r_A^2 = AC' \cdot AB, \qquad r_B^2 = BA' \cdot BC, \qquad r_C^2 = CB' \cdot CA.$$

A keresett sugarak tehát mértani középarányosként megszerkeszthetők (1. ábra). Ezzel feladatunkat megoldottuk.

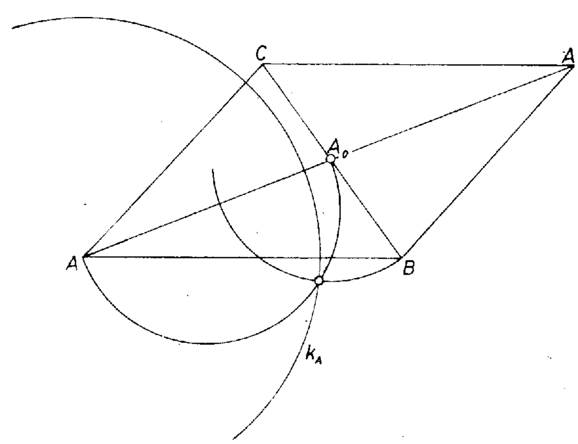
Megjegyzés. Az (1) alatti első kifejezések könnyen kifejezhetők a háromszög egy súlyvonalával és a szemben fekvő oldallal. A BC oldal felezőpontját A_0-lal, továbbá A-nak A_0-ra való tükörképét A^*-gal jelölve az ABA^*C paralelogrammából

$$\begin{gathered} AB^2 + BA^{*2} + A^*C^2 + CA^2 = AA^{*2} + BC^2 = 4AA_0^2 + BC^2, \\ 2c^2 2b^2 - a^2 = 4s_a^2. \end{gathered}$$

Eszerint

$$r_A^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = AA_0^2 - A_0B^2,$$

tehát az AA_0 súlyvonal fölötti Thalész-kört az A_0 körüli, A_0B sugarú körrel metszve megkapjuk k_A-nak egy pontját, s i. t. (2. ábra). – A szerkesztés helyessége a számítás megfordításával igazolható.



2. ábra