

I. Legyen a sorozat első tagja  $a_1 = a$ , differenciája  $d$ , továbbá a 0-tól  $(n - 1)$ -ig terjedő egész számok összege  $t_1$ , négyzetösszegük  $t_2$ , köbösszegük  $t_3$ . Ekkor az  $i$ -edik tag  $a_i = a + (i - 1)d$  kifejezése alapján  $i = 1, 2, \dots, n$ -re összegezve

$$(2) \quad s_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n = na + d[0 + 1 + \dots + (n - 1)] = na + t_1d,$$

és hasonlóan

$$(3) \quad \begin{aligned} s_2 &= a_1^2 + \dots + a_n^2 = na^2 + 2t_1ad + t_2d^2, \\ s_3 &= na^3 + 3t_1a^2d + 3t_2ad^2 + t_2d^3. \end{aligned}$$

Ezeket (1)-nek  $B$  bal oldalába helyettesítve az  $a$ -t, tartalmazó tagok kiesnek:

$$B = d^3(n^2t_3 - 3nt_1t_2 + 2t_1^3),$$

a zárójelben  $B$ -nek az a speciális értéke áll, ha  $a = 0$  és  $d = 1$ .

Ismeretes másrészt, hogy

$$t_1 = \frac{(n-1)n}{2}, \quad t_2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{t_1(2n-1)}{3}, \quad t_3 = \frac{(n-1)^2n^2}{4} = t_1^2,$$

ezekkel

$$B = d^3t_1^2\{n^2 - n(2n-1) + 2t_1\},$$

és a nagy zárójel értéke azonosan 0. Az állítást bebizonyítottuk.

II. Adatainkat (1)-behelyettesítve

$$67n^2 - 600n + 512 = 0,$$

amiből  $n$  egyik értéke tört, feladatunkban nem használható, a másik 8. Ezzel (2) és (3) így alakul:

$$(2') \quad \begin{aligned} 2a + 7d &= 2, \\ 4a^2 + 28ad + 70d^2 &= 25, \end{aligned}$$

és az első egyenlet négyzetét a másodikból kivonva

$$d^2 = 1, \quad d' = 1, \quad d'' = -1,$$

és így (2')-ből

$$a' = -2,5, \quad a'' = 4,5.$$

Az elsővel adódó sorozat tagjai:

$$-2,5, \quad -1,5, \quad -0,5, \quad 0,5, \quad 1,5, \quad 2,5, \quad 3,5, \quad 4,5,$$

a másodikkal ugyanezeket fordított sorrendben kapjuk.

Az  $s_3$  adatot számításunknak csak kezdő szakaszában,  $n$  meghatározásában használtuk fel. S mivel közben  $n$  egyik értékét mellőztük, kézenfekvő, hogy  $s_3$  értékét ellenőrizzük. Ezt megkönnyíti, hogy a 8 tagból 3 pár csak előjelben különbözik, s ez áll köbükre is, ezért

$$s_3 = 3,5^3 + 4,5^3 = \frac{1}{8}(7^3 + 9^3) = 134.$$

*Ádám Margit* (Szeged, Radnóti M. Gimn., III. o. t.)  
*Láng István* (Székesfehérvár, Teleki B. Gimn., III. o. t.)