Az 1079. gyakorlatban[1] háromszöget szerkesztettünk három különböző szakaszból. – Ezeket c-, d-, e-vel jelölve – a megoldhatóság – azaz valódi háromszög létrejöttének – feltételére az

$$|2c-e|<3d<2c+e \tag{1}$$

kettős egyenlőséget kaptuk. Azt is vizsgáltuk konkrét példákon, hogy három tetszés szerinti szakaszt rögzítve és csupán szerepüket változtatva minden lehetséges módon, hány esetben kapunk megoldást. Vizsgáljuk az utóbbi kérdést tetszés szerinti p, r, s szakaszhármasra, megengedve köztük az egyenlőséget is.

Válasszuk a betűzést úgy, hogy $p\geq r\geq s$. Minden ilyen szakaszhármast jellemezhetünk a p/r, s/r hányados-párral is. Ezekre

$$x=\frac{p}{r}\geq 1,\qquad y=\frac{s}{r}\leq 1. \tag{2}$$

Láttuk a gyakorlat megoldásában, hogy p-t nem választhatjuk d szerepére, hiszen így a $3d<2c+e$ feltétel nem teljesülne. Vizsgáljuk meg, milyen feltételt kapunk az $(x,\ y)$ hányados-párra (1)-ből a szerepek további 4 lehetséges megválasztása mellett.

A) $\quad c=p,\quad d=r,\quad e=s\quad$ mellett (1) szerint

$$|2p-s|<3r<2p+s,$$

azaz

$$|2x-y|<3<2x+y.$$

A $(2x-y)$ különbség mindig pozitív, így elhagyhatjuk az abszolút érték jelét, majd a bal oldali egyenlőtlenséget rendezve kapjuk az

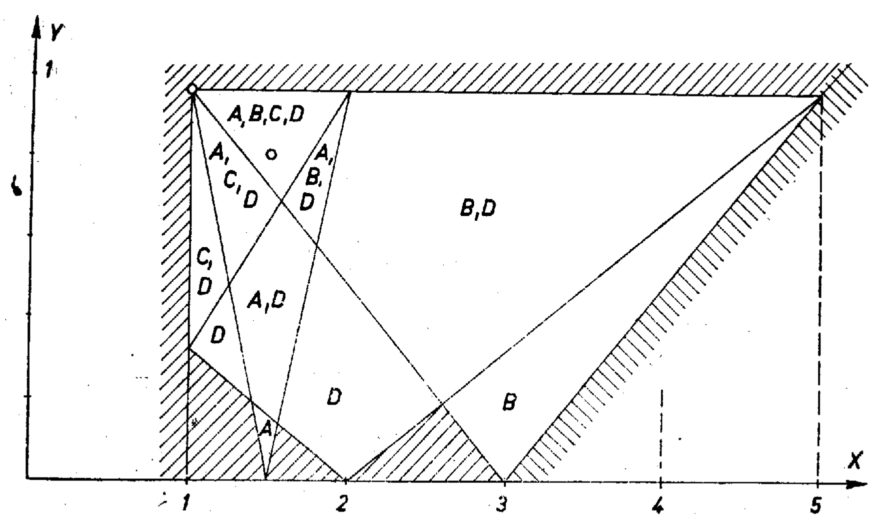
$$y>2x-3$$

feltételt, a jobb oldal alapján pedig

$$y>3-2x.$$

A választott szereposztásban tehát akkor kapunk megoldást, ha az $(x,\ y)$ számpár képe a szokásos derékszögű koordinátarendszerben az $y=2x-3$ és az $y=3-2x$ egyenesek felett van, amit úgy is mondhatunk, hogy a következő függvény képe felett:

$$y=|2x-3| \tag{A}$$



B) $\quad c=s,\quad d=r,\quad e=p\quad$ mellett (1)-ből, az előbbiekhez hasonlóan

$$|x-2y|<3<x+2y.$$

Ha $(x-2y)$ negatív, azaz $x<2y$, akkor a bal oldali

$$2y-x<3$$

[1]Lásd K. M. L. 35 (1967) 63. o.

egyenlőtlenség $2y-x<2y\le 2$ miatt mindig teljesül, csak az $x-2y\ge 0$ esettel kell foglalkoznunk. Ekkor az

$$y>\frac{x}{2}-\frac{3}{2},$$

továbbá a jobb oldali egyenlőtlenségből az

$$y>-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$$

feltételt kapjuk, ezek is összefoglalhatók:

$$(B)\qquad y>\left|\frac{x-3}{2}\right|.$$

C) A $c=p,\quad d=s,\quad e=r$ esetben (1) így alakul:

$$|2x-1|<3y<2x+1.$$

$x\ge 1$ miatt $2x-1>0$, az abszolút érték jele elhagyható. A jobb oldali egyenlőtlenség viszont $3y\le 3\le 1+2x$ miatt csak az $x=y=1$ értékpárt zárja ki:

$$(C)\qquad y>\frac{2x}{3}-\frac{1}{3};\qquad (x,\,y)\ne(1,\,1).$$

D) Végül $c=r,\quad d=s,\quad e=p$ mellett (1) alapján

$$|2-x|<3y<2+x.$$

A jobb oldal ismét csak az $(1,\,1)$ hányados-párt zárja ki. A bal oldalon álló egyenlőtlenséggel együtt ez a következő feltételre vezet:

$$(D)\qquad y>\left|\frac{x-2}{3}\right|.\qquad (x,\,y)\ne(1,\,1)$$

Megrajzolva mármost a koordináta-rendszerben a (2), valamint az *(A)–(D)* feltételeket teljesítő pontokat elhatároló egyenesszakaszokat, az ábráról minden p, r, s szakaszhármas, azaz x, y hányados-pár esetére leolvashatjuk a megoldásra vezető szereposztások számát. Ez annyi, ahány az (A), (B), (C), (D) feltételek közül az illető pontban teljesül. Pl. $p=9$, $r=6$, $s=5$ esetén az $x=3/2$, $y=5/6$ pont mind a 4 határvonalnak fölötte van.

Ábránk a szereposztások közti kapcsolatok kérdésének vizsgálatát is lehetővé teszi. Csak példaként említjük a következőket: Ha C-típusú szereposztással van megoldás egy szakaszhármasból, akkor legalább még egy megoldás van. Ha egy szakaszhármasból legalább két szereposztás ad megoldást, akkor ezek egyike D-típusú.

Tusnády Gábor