Megjegyzések a 1029. és 1109. gyakorlatokhoz

1. Az 1029. gyakorlatban látott eljárás és annak az 1109. gyakorlatban látott módosítása [1] a következő általánosabb eljárás speciális esetének tekinthető.

Tegyük fel, hogy $\sqrt{a}$ közelítésére korábbi lépésekből a c_i közelítő értéket kaptuk. Legyen

$$m_i = a - c_i^2,$$

és $\sqrt{a}$ új közelítése legyen $c_{i+1} = c_i + d_i$, akkor

$$m_{i+1} = a - c_{i+1}^2 = a - (c_i + d_i)^2 = a - c_i^2 - d_i(2c_i + d_i) = m_i - d_i(2c_i + d_i)$$

függetlenül attól, hogyan határoztuk meg az új közelítésben használt d_i értéket. Ennek meghatározásánál két szempontot vehetünk figyelembe:

a) c_{i+1} jobb közelítése legyen $\sqrt{a}$-nak, mint c_i, vagyis $|m_{i+1}| < |m_i|$ legyen. Minél nagyobb az $|m_i| - |m_{i+1}|$ különbség, annál jobb az eljárásunk.

b) d_i meghatározása egyszerű legyen.

Az első szempontot tökéletesen kielégítenénk, ha d_i-t úgy határoznánk meg, hogy $m_{i+1} = 0$ legyen, ami

$$m_{i+1} = a - c_{i+1}^2 = (\sqrt{a} - c_{i+1})(\sqrt{a} + c_{i+1}) = 0$$

miatt azt jelentené, hogy $c_{i+1} = \sqrt{a}$, $d_i = \sqrt{a} - c_i$ volna. (Itt és a továbbiakban feltesszük, hogy a $\sqrt{a}$ közelítéséhez használt c_j számok pozitívak.) d_i ilyen értékét természetesen csak $\sqrt{a}$ pontos értéke alapján adhatnánk meg, közelítő értékét viszont a

$$d_i = \sqrt{a} - c_i = \frac{a - c_i^2}{\sqrt{a} + c_i} = \frac{m_i}{\sqrt{a} + c_i}$$

átalakítás alapján úgy adhatjuk meg, hogy az $\dfrac{m_i}{\sqrt{a} + c_i}$ tört nevezőjében $\sqrt{a}$-t a már ismert közelítő értékével, c_i-vel helyettesítjük: így az 1029. gyakorlat megoldásában használt, a $d_i = \dfrac{m_i}{2c_i}$ összefüggéssel megadott eljáráshoz jutunk. Mivel azonban az $\dfrac{m_i}{2c_i}$ hányados az ideális d_i korrekciónak csak közelítése, nem érdemes azt túl nagy pontossággal meghatározni. Így jutunk el a második szempont figyelembevételéhez.

A gyökvonás szokott[2] (10-es számrendszerbeli) végrehajtásánál d_i-t úgy határozzuk meg, hogy az $\sqrt{a}$-nak $(i+1)$-ik értékes jegye legyen, vagyis az $\dfrac{m_i}{2c_i}$ hányadost csak egy értékes jegyre határozzuk meg (ami azonban ebben az esetben 0 is lehet). Ugyanígy a második szempontot tartottuk szem előtt az 1109. gyakorlat megoldásában, amikor az $a = 1 + x$ szám gyökét x polinomjával akartuk közelíteni; tehát c_i-t

$$c_i = a_0 + a_1 x + \ldots + a_i x^i$$

alakban kívántuk megadni. Ebben az esetben m_i is az x polinomja lesz, és ha x kicsi, m_i csökkenését biztosítjuk azzal, ha x-nek m_i-ben fellépő legalacsonyabb kitevőjű hatványa x^{i+1} azaz $m_i = b_i x^{i+1} + \ldots$. Ha ezt már az első i lépésben sikerült biztosítanunk, akkor az $(i+1)$-ik lépésben úgy érjük el, hogy d_i-t $d_i = \dfrac{b_i}{2a_0} \cdot x^{i+1}$-nek választjuk, hiszen ekkor az $m_{i+1} = m_i - d_i(2c_i + d_i)$ polinomban x^{i+1} együtthatója 0 lesz: d_i ilyen választása épp annak felel meg, hogy az $\dfrac{m_i}{2c_i}$ hányadost a számláló és nevező legalacsonyabb fokú tagjainak a hányadosával helyettesítjük.

2. Fenti meggondolásaink alapján a_{i+1}-et könnyen meghatározhatjuk $(a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_i)$ segítségével. Mint láttuk, $d_i = \dfrac{b_i}{2a_0} \cdot x^{i+1}$, tehát $a_{i+1} = \dfrac{b_i}{2a_0}$, ahol $a_0 = 1$ és b_i az m_i polinomban x^{i+1} együtthatója:

$$m_i = a - c_i^2 = (1 + x) - (a_0 + a_1 x + \ldots + a_i x^i)^2$$

tehát

$$b_i = -2(a_1 a_i + a_2 a_{i-1} + \ldots),$$

ahol az utolsó tag, ha i páros, vagyis $i = 2j$, akkor $a_j a_{j+1}$; ha pedig $i = 2j - 1$, akkor $(1/2) \cdot a_j^2$. Kaptuk tehát, hogy

$$a_{i+1} = -(a_1 a_i + a_2 a_{i-1} + \ldots).$$

Ennek alapján a további két tag együtthatóját gyorsabban határozhatjuk meg: ha már tudjuk, hogy

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_2 = \frac{1}{2^3}, \qquad a_3 = \frac{1}{2^4}, \qquad a_4 = \frac{5}{2^7},$$

[1] Lásd a megoldást ezen számban 151. o.

[2] A négyzetgyökvonás korábban tanított algoritmusa, a gyök számjegyeinek egyenként, egymás után való meghatározása az 1967/68. tanévtől kezdve nem szerepel a gimnáziumok tankönyvében. – Szerk.

akkor

$$a_5 = -(a_1a_4 + a_2a_3) = \frac{5}{2^8} + \frac{1}{2^7} = \frac{7}{2^8},$$
$$a_6 = -(a_1a_5 + a_2a_4 + \frac{1}{2} \cdot a_3^2) = -\frac{7}{2^9} - \frac{5}{2^{10}} - \frac{1}{2^9} = -\frac{21}{2^{10}}.$$

Tusnády Gábor