A három egyenletet összeszorozva, az új egyenlet mindkét oldala teljes négyzet. Áttéve $x^2y^2z^2$-et a jobb oldalra, a különbség szorzattá alakítható:

$$
\begin{aligned}
(4)\qquad 0=(z-a)^2(x-b)^2(y-c)^2-x^2y^2z^2&=\big\{(z-a)(x-b)(y-c)-xyz\big\}\cdot\\
&\cdot\big\{(z-a)(x-b)(y-c)+xyz\big\}=E\cdot F,
\end{aligned}
$$

eszerint a kapcsos zárójelbeli E, F tényezők valamelyikének az értéke 0. Először azt az esetet tekintjük, ha az első zárójelbeli $E=0$.

I. Ebből kiindulva és az xy szorzatot (1) alapján egymás után kétszer $(z-a)^2$-nel helyettesítve:

$$
\begin{aligned}
0=(z-a)(x-b)(y-c)-z(z-a)^2&=(z-a)\big\{xy-cx-by+bc-z(z-a)\big\}=\\
&=(z-a)(-az+a^2-cx-by+bc),
\end{aligned}
$$

ami ismét két módon teljesülhet: vagy $z=a$ esetén vagy pedig ha

$$
cx+by+az=a^2+bc. \tag{5}
$$

Tüstént látjuk azonban, hogy a $z=a$ lehetőség csak bizonyos a, b, c paraméter–rendszerek mellett vezet megoldásra, hiszen így (1) alapján x és y egyike 0, tehát (3) vagy (2) mindkét oldala 0, márpedig

$$
\begin{cases}
z=a,\quad x=0,\quad y=c & \text{csak akkor megoldás, ha (2)-ben}\quad ac=b^2,\\
z=a,\quad y=0,\quad x=b & \text{csak akkor megoldás, ha (3)-ban}\quad ab=c^2.
\end{cases} \tag{6}
$$

Folytatva az első esetet, E-ben előbb (2) alapján yz-t, majd (3) alapján zx-et kifejezve, az előbbiekhez hasonlóan

$$
bx+ay+cz=b^2+ac, \tag{7}
$$

$$
az+cy+bz=c^2+ab. \tag{8}
$$

Adódott közben az $x-b=0$, ill. $y-c=0$ lehetőség is E-nek 0-vá tevésére, ezek mindegyike ismét megadja (6) egyikét, továbbá mindkettő adja (6) mellé harmadikként a következő esetleges megoldást:

$$
x=b,\quad z=0,\quad y=c,\quad \text{akkor, ha (1)-ben}\quad bc=a^2. \tag{6'}
$$

Ezek szerint ismeretleneinkre az (5), (7) és (8) egyenletekből álló lineáris egyenletrendszernek kell teljesülnie. Adjuk hozzá (5)-höz (7)-nek valamely λ számmal és (8)-nak valamely μ számmal való szorzatát:

$$
(c+b\lambda+a\mu)x+(b+a\lambda+c\mu)y+(a+c\lambda+b\mu)z=(a^2+bc)+(b^2+ac)\lambda+(c^2+ab)\mu, \tag{9}
$$

és határozzuk meg λ-t és μ-t úgy, hogy innen y és z egyidejűen kiessék, azaz legyen

$$
a\lambda+c\mu+b=0 \text{ és } c\lambda+b\mu+a=0,
$$

amiből

$$
\lambda=\frac{b^2-ac}{c^2-ab},\qquad \mu=\frac{a^2-bc}{c^2-ab},
$$

hacsak $c^2-ab\neq 0$. Ezekkel (9)-ben x együtthatója és a jobb oldal értéke rendre

$$
c+\frac{b(b^2-ac)+a(a^2-bc)}{c^2-ab}=\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{c^2-ab},\quad \text{illetőleg}
$$

$$
\frac{1}{c^2-ab}\big\{(a^2+bc)(c^2-ab)+(b^2+ac)(b^2-ac)+(c^2+ab)(a^2-bc)\big\}=\frac{(b^2-ac)^2}{c^2-ab}.
$$

Eszerint y-t és z-t hasonlóan kiszámítva az (5), (7), (8) rendszer egyértelmű megoldása csak a következő lehet:

$$
x=\frac{(b^2-ac)^2}{D},\qquad y=\frac{(c^2-ab)^2}{D},\qquad z=\frac{(a^2-bc)^2}{D}, \tag{10}
$$

ahol

$$
D=a^3+b^3+c^3-3abc,
$$

és természetesen $D\neq 0$.

Könnyű észrevenni a (10)-beli számlálókról, hogy rendre azok mellett a feltételek mellett adnak 0-t, amelyeket (6)-ban, ill. (6′)-ben láttunk, és egyszerű számítás mutatja, hogy az ottani feltételek mellett (10) éppen rendre az ott látott három megoldást adja.

Megmutatjuk, hogy ha $D = 0$, akkor az (1)–(3) rendszernek nincs egyértelmű megoldása; részletesebben: vagy végtelen sok megoldása van, vagy egyáltalán nincs megoldása. (Természetesen *valós* megoldásra gondolunk, másrészt még mindig olyan megoldásokra, amelyek mellett (4)-ben $E = 0$, hiszen ezek ekvivalensek az (5), (7), (8) rendszer megoldásaival.) Felhasználjuk, hogy D szorzattá alakítható:[1]

$$D = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) =$$

(11) $$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}.$$

α) A második tényező akkor és csak akkor 0, ha $a-b=b-c=c-a=0$, azaz ha $a=b=c$. Ekkor, ha még $a=0$ is teljesül, az eredeti (1)–(3) egyenletrendszert nyilvánvalóan minden $x=y=z$ értékrendszer kielégíti, és E is 0. Ha pedig $a>0$, akkor az (5), (7), (8) egyenletek mindegyike így egyszerűsödik:

$$a(x+y+z) = 2a^2, \quad \text{ill.} \quad x+y+z = 2a.$$

Innen $z = 2a-x-y$ helyettesítéssel (1)–(3) mindegyike erre vezet:

(12) $$y^2-(2a-x)y+(a-x)^2 = 0,$$

és az ezt kielégítő y-ok valósak, ha diszkriminánsa:

$$(4a-3x)x \geq 0, \quad \text{azaz ha} \quad 0 \leq x \leq \frac{4a}{3}.$$

Így választva x-et, z is valós. (Teljesül $y \geq 0$ is (12) mindkét megoldására, mert összegük: $2a-x>0$ és szorzatuk: $(a-x)^2 \geq 0$. Így pedig $z \geq 0$ is teljesül; ugyanis (12) két megoldásának számtani közepe $(y_1+y_2)/2 = m = (2a-x)/2 = a-x/2 \leq a$, a kisebbik megoldás, y_1, a $(0,\, m)$ intervallumba esik, mert $y=0$ mellett (12) bal oldala ≥ 0, ezért y_2 az intervallumnak m-re való tükörképébe esik: $y_2 \leq 2m = 2a-x \leq 2a$, tehát evvel is $y_2+x \leq 2a$, $z \geq 0$.)

Az $a>0$ eset eredményéből már $a<0$ esetére is következik, hogy végtelen sok (valós) megoldás van. Ha ugyanis az $xy=(z-a)^2$, $yz=(x-a)^2$, $zx==(y-a)^2$ rendszernek egy megoldása x_1, y_1, z_1 akkor a helyére $(-a)$-t írva a rendszert kielégíti $x_2=-x_1$, $y_2=-y_1$, $z_2=-z_1$, így ugyanis $x_2y_2=x_1y_1=(z_1-a)^2=(-z_2-a)^2=(z_2+a)^2$ s i. t.

Kézenfekvő itt megvizsgálni egy föntebb függőben maradt kérdést. A λ és μ számokkal végzett kiküszöbölés érvényességének föltétele ez volt: $c^2-ab \neq 0$. Ha $c^2-ab=0$, akkor y és z kiküszöbölése helyett próbálkozhatunk x és z, vagy pedig x és y hasonló, egyidejű kiküszöbölésével, ugyancsak (9)-ből. Ennek föltételéül hasonlóan ezt kapjuk: $b^2-ac \neq 0$, ill. $a^2-bc \neq 0$. Ha viszont e három kifejezés mindegyike 0-val egyenlő, akkor összegük is 0, és ez az összeg éppen a (11)-beli második tényező. – Emiatt volt szükség arra, hogy a második tényező eltűnése esetére a megoldást mintegy újra kezdjük az (5), (7), (8) rendszerből.

β) Ha viszont $D=0$ amiatt teljesül, mert (11) első tényezőjére áll fenn $a+b+c=0$ – de ez nem úgy adódik, hogy $a=b=c=0$, hiszen ezt az esetet már láttuk –, akkor az (1)–(3) rendszernek nincs olyan megoldása, amelyre (5), (7), (8) is teljesül. Ugyanis összeadva az (5), (7), (8) egyenleteket, teljesülnie kellene ennek:

$$(a+b+c)(x+y+z) = a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca,$$

ámde itt a bal oldal 0, a jobb oldal viszont az $a=b=c=0$ eset kizárása folytán

$$\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\} = \frac{1}{2}\{(-c)^2+(-a)^2+(-b)^2\} > 0.$$

Ezzel az $E=0$ eset vizsgálatát befejeztük.

II. Ha (4)-ben $F=0$, azaz

(13) $$(z-a)(x-b)(y-c)+xyz = 0,$$

ezt a fentiekhez hasonlóan alakítva olyan egyenleteket kapunk, amelyek csak két ismeretlenre nézve elsőfokúak, a harmadikra nézve másodfokúak, pl.

$$0 = F = (z-a)\{2z^2-3az-cx-by+a^2+bc\}.$$

Ebben az esetben a rendszert általában nem tudjuk megoldani, mert pl. y és z kiküszöbölésével x-re 2-nél magasabb fokú egyenlet adódik. (Adott, numerikus a, b, c értékek mellett rendszeres próbálgatás útján közelítő megoldást lehet keresni.) Az sem segít a megoldáshoz, hogy az $a=b=c$ speciális esetben ismerjük (13)-nak egy megoldását: $x=y=z=a/2$.

Megjegyzés. Sajnálatos, hogy a II. eset megoldhatatlansága miatt több – igényes – versenyző egyáltalán nem küldött dolgozatot.

[1] Lásd pl.: *Faragó L.:* Matematikai szakköri feladatgyűjtemény. 3. kiadás. Tankönyvkiadó. Budapest 1963. 27. feladat.