1. feladat. *A és B között vasúti ingajárat közlekedik; a B-be megérkező vonat várakozás nélkül visszaindul A-ba. A vasútvonal mellett kötélpálya is vezet. Egy csille egyszerre indult el A-ból a vonattal. Fél óra múlva a csille ugyanannyira volt A-tól, mint a vonat B-től. A csille további 2 km-nyi útja után a két jármű helyzete ismét szimmetrikus lett az AB útszakasz középpontjára nézve. (A vonat közben visszafordult B-ből). Ezután egy negyedóra elteltével a két jármű először találkozott. – Mekkora A és B távolsága és a két jármű sebessége? (Feltesszük, hogy a sebességek állandók.)*

I. megoldás. Az első fél óra után a vonatnak akkora útja van még hátra B-ig, amennyit a csille megtett ez alatt az idő alatt, együttesen tehát annyi utat tettek meg, mint az AB távolság. A harmadik adat szerinti találkozásig viszont a két jármű együtt oda-vissza bejárta az AB távolságot. Ehhez kétszer annyi idő kellett, tehát a találkozás 1 órával az indulás után történt. A második szimmetrikus helyzet 1/4 órával ezelőtt, vagyis 3/4 órával az indulás után következett be. A csille tehát a mondott 2 km-nyi utat az óra harmadik negyedórája alatt tette meg, így sebessége 8 km óránként.

Eszerint a csille az első szimmetrikus helyzetben 4 km-re, a másikban 6 km-re volt A-tól. Ugyanennyire volt a vonat e két időpontban B-től, és mivel közben B-ig ment, és onnan visszafordult, a harmadik negyedóra alatt 10 km-t tett meg, sebessége 40 km óránként.

Végül A és B távolsága, mint a járművek fél órai útjának összege, 24 km.

*

A versenyzők túlnyomórészt egyenletrendszer felállításával dolgoztak:

II. megoldás. A vonat és a csille sebességét (km/óra egységben) v_1, ill. v_2-vel, az AB távolságot (km-ben) s-sel, a csillének 2 km megtételéhez szükséges idejét (órában) t-vel jelölve a feltételek így írhatók fel:

$$v_2 \cdot \frac{1}{2} = s - v_1 \cdot \frac{1}{2}, \qquad v_2 t = 2,$$

$$v_2 \cdot \left(\frac{1}{2} + t\right) = v_1 \cdot \left(\frac{1}{2} + t\right) - s, \qquad (v_1 + v_2)\left(\frac{3}{4} + t\right) = 2s.$$

Az első egyenletet átrendezve

$$v_1 + v_2 = 2s.$$

Ezt az utolsó egyenletbe helyettesítve és a 0-tól különböző $2s$-sel egyszerűsítve, majd a 2. egyenletet felhasználva

$$\frac{3}{4} + t = 1, \quad t = \frac{1}{4}, \quad v_2 = \frac{2}{t} = 8.$$

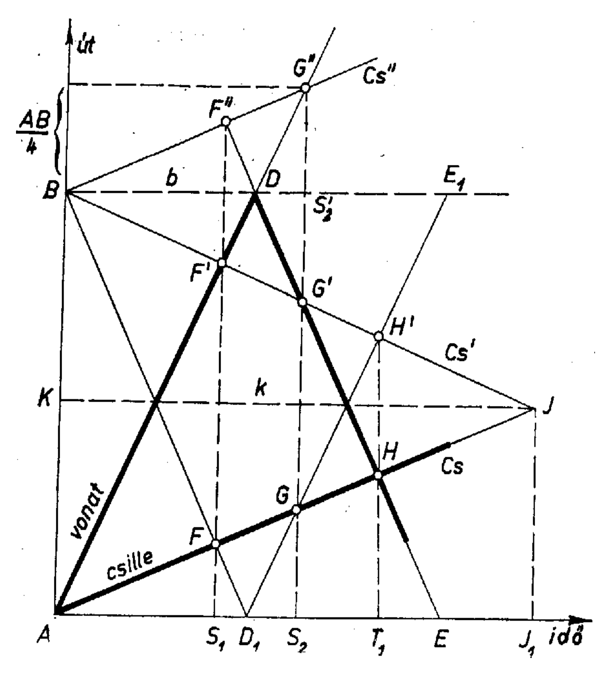
Ezeket az utolsó két egyenletbe helyettesítve és átrendezve

$$\frac{3}{4}(v_1 - 8) = s, \qquad v_1 + 8 = 2s,$$

és v_1-et a második egyenletből az elsőbe helyettesítve

$$\frac{3}{4}(2s - 16) = s, \qquad \text{amiből} \qquad s = 24 \text{ és } v_1 = 40.$$

Megjegyzés. A gondolatmenet v_2 meghatározásáig láthatóan megegyezik az I. megoldáséval.



1. ábra

III. megoldás. Mérjük fel egy derékszögű koordinátarendszer tengelyeire a vonat útját (A-tól mérve) és az időt (a közös indulástól számítva, 1. ábra). A vonat mozgását ekkor egy B magasságig egyenesen emelkedő, onnan ugyanolyan szögben süllyedő ADE törött vonal ábrázolja, a DE egyenes az AD egyenes tükörképe az idő-tengellyel B-n át húzott b párhuzamosra. Ezzel lényegében megválasztottuk az idő-tengely és az út-tengely egységeinek arányát, ezért a csille mozgásának grafikonjaként csak egyetlen ACs félegyenes felel meg. Éppen ennek megszerkesztését tekintjük feladatunknak, és kérdéseinkre a választ a helyes grafikonpárból fogjuk kiolvasni.

A járműveknek a pályán mutatkozó szimmetrikus helyzetei a grafikonokban is megmutatkoznak, a grafikonok megfelelő pontjai egymás tükörképei arra a k egyenesre nézve, amely átmegy az AB szakasz K középpontján és párhuzamos az idő-tengellyel. Ezeket a vonat grafikonjából kimetszi ACs-nek k-ra vonatkozó BCs' tükörképe, legyenek ezek rendre F', G', ekkor k-ra való F, G tükörképük ACs-nek ugyanazon abszcisszájú pontja. Másrészt a találkozásnak ACs és a DE grafikonszakasz közös H pontja felel meg.

Legyen F, G, H vetülete az idő-tengelyen rendre S_1, S_2, T_1, így az első szimmetrikus helyzetig eltelt fél órának az idő-tengely AS_1 szakasza felel meg, a második szimmetrikus helyzettől a találkozásig eltelt negyedórának az S_2T_1 szakasz. Mármost AS_1, S_2T_1 egyenlő az ABF', illetőleg $G'GH$ háromszögnek az út-tengelyre merőleges magasságával, e két háromszög pedig hasonló, mert az AB, $G'G$ oldalukon levő szögek a végzett tükrözések miatt páronként egyenlők. Eszerint

$$G'G : AB = S_2T_1 : AS_1 = \frac{1}{4} : \frac{1}{2},$$

tehát $G'G = AB/2$, továbbá $G'S_2' = S_2G = AB/4$, ahol S_2' a G' vetülete b-n.

G'-nek b-re vett G'' tükörképe az AD egyenesen van, és itt átmegy BCs'-nek b-re vett BCs'' tükörképe is. Másrészt a kétszeri tükrözés miatt BCs'' előáll ACs-nek azzal az eltolásával is, amely A-t B-be viszi. Ezért $GG'' = AB$, és $S_2G'' = 5AB/4 = 5S_2G$, ami meghatározza az AD egyenesen G''-t és vele BCs''-t, tehát ACs-t is. Ezek szerint a vonat sebessége 5-ször akkora, mint a csilléé.

Másrészt F'-nek b-re vett tükörképe a DE és BCs'' egyenesek metszéspontja, így $FF'' = AB = 2GG'$, és az $FF''H$, $GG'H$ háromszögek hasonló volta miatt $S_1T_1 = 2 \cdot S_2T_1$ és $S_1S_2 = S_2T_1$, a csillének a két szimmetrikus helyzet közti 2 km-es útszakasz megtételéhez ugyancsak 1/4 órára volt szüksége. Eszerint a csille sebessége 8 km/ó, a vonaté 40 km/ó. Továbbá AT_1 megfelel 1 órának, eddig a vonat és a csille együttes útja 48 km, az AB szakasz kétszerese, tehát $AB = 24$ km.

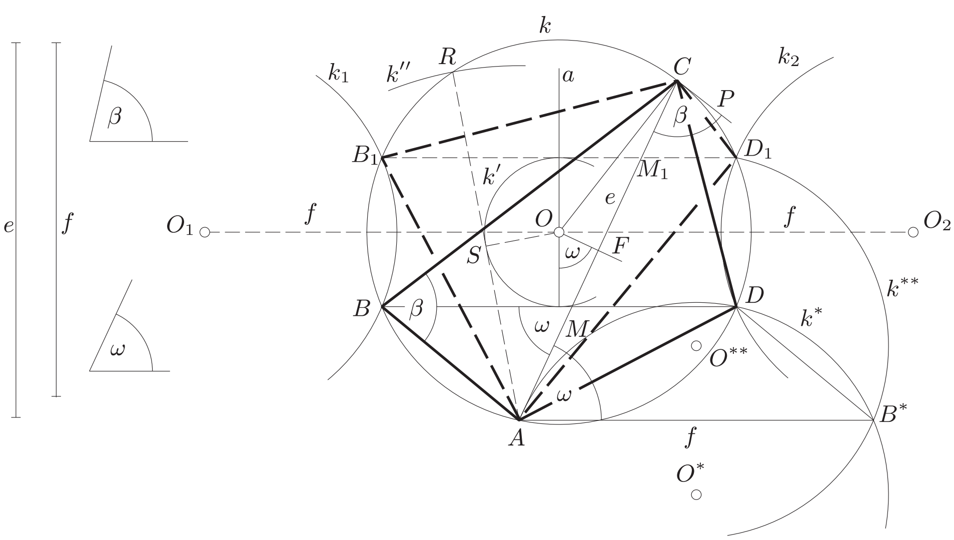
Megjegyzés. Az 1. ábrán a vonat– csille grafikon-pár meghatározásának az a változata is látható, amelyben az F, G találkozási pontokat ACs-ből ADE-nek BD_1E_1 tükörképével metsszük ki (vagyis mintha B-ből is indítanánk vonatot A felé). Ekkor $BD_1 \parallel DE$, $D_1E = BD = AD_1$, $AE = 2AD_1$, és $AFD_1\triangle \sim AHE\triangle$ miatt $AH = 2AF$, $AS_1 = AT_1/2$. Másrészt $AS_1 = 2S_2T$ és $BFF'\triangle \sim G'HH'\triangle$ miatt $FF' = 2HH'$ és ACs-nek k-n levő pontját J-vel jelölve $FF'J\triangle \sim HH'J\triangle$, így $S_1J_1 = 2T_1J_1 = S_1T_1 + T_1J_1$, amit a fentebbivel egybevetve $AS_1 = S_1T_1 = T_1J_1 = AJ_1/3$, és $AF = FH = HJ$. Ebből a tetszés szerint rajzolt ACs egyenesen kijelölhető F és J helyzete, ami $AB = 2AK$ alapján meghatározza BF-et és tükrözéssel AD-t.

2. feladat. *Adott egy húrnégyszög két átlója, az átlók szöge és a húrnégyszögnek a hosszabb átlóval szemközti egyik szöge. Szerkesztendő a négyszög.*

I. megoldás. Legyen $ABCD$ a feltételeket kielégítő négyszög, $AC = e \geqq f = BD$ az adott hosszúságú átlók, metszéspontjuk M, $ABC\sphericalangle = \beta$, és $AMB\sphericalangle = \omega$ az adott szögek. A betűzés alkalmas választásával feltehetjük, hogy $\omega \leqq 90°$.

Az adatokból megszerkeszthető a négyszög köré írható k kör, mint olyan kör, amelyiknek egyik ívéről az e szakasz β szögben látszik. Ezután f hosszúságú húrt kell elhelyeznünk úgy, hogy az az e hosszúságú húrt ω szögben messe.

A k kör f hosszúságú húrjai felezőpontjukban érintenek egy k-val koncentrikus k' kört. Ehhez kell AC-vel ω szöget bezáró érintőt szerkeszteni.



2. ábra

Ezek alapján a szerkesztés pl. a következő módon végezhető: $AC = e$ hosszúságú szakaszt rajzolunk, és erre $ACP\sphericalangle = \beta$ szöget szerkesztünk; a CP-re C-ben szerkesztett merőlegesnek és az AC-re F felezőpontjában állított merőlegesnek O metszéspontja körül C-n át szerkesztett k kör a négyszög köré írt kör. Ezt pl. A-ból f sugarú körrel egyik irányban elmetsszük az R pontban.

Az AR-re O-bó1 bocsátott merőleges S talppontján át O körül húzott kör k'. Szerkesszük meg O-n át azt az a egyenest, amelyik AC felező merőlegesének AC felé haladó félegyenesével az egyenes A-t tartalmazó partján ω szöget zár be. Ennek k'-vel való metszéspontjaiban k'-höz húzott érintők (a-ra állított merőlegesek) k-ba eső húrjai f hosszúságúak és egyenesük AC-vel ω szöget zár be, mert e hajlásszög szárai a-ra, ill. OF-re merőlegesek.

Ahhoz, hogy az A és C pont és a most szerkesztett valamelyik húr végpontjai meghatározta négyszögben az e és f hosszúságú húr átló legyen, kell, hogy a kettő messe egymást. Ha ez teljesül, akkor jelöljük D-vel az f hosszúságú húrnak azt a végpontját, amelyik az AC egyenesnek ugyanazon a partján van, mint P, a másik végpontot B-vel. Így a kerületi szögek egyenlősége folytán $ABC\sphericalangle = ACP\sphericalangle = \beta$, ugyanis CP a k kör érintője, mert szerkesztés szerint merőleges az OC sugárra. Ezek szerint az $ABCD$ négyszög megfelel a feladat követelményeinek.

Mindig megszerkeszthető a k kör és $e \geqq f$ folytán az AR húr, a k' kör, az a egyenes és erre a k'-vel való metszéspontjaiban állított merőlegesek. A feladatnak nincs megoldása, 1 vagy 2 megoldása van aszerint, hogy az a-ra állított merőlegesek k-ba eső szakaszai nem metszik AC-t, ill. csak az egyikük, vagy mind a kettő metszi.

Megjegyzés. A k kör f hosszúságú, kívánt állású húrjainak végpontjait kimetszhetjük azokkal a k_1, k_2 körökkel is, amelyek k-nak f nagyságú eltolásával adódnak az e-vel ω szöget bezáró (és egymással ellentétes) irányban. $f \leqq e$ miatt közös pont mindig van, és a húr megfelel, ha végpontjai AC két oldalán adódnak.

II. megoldás. Tovább is a fenti jelöléseket használjuk. Tükrözzük az AD oldal E felezőpontjára[1] B-t, O-t és k-t, legyen a kép B^*, 0^*, k^*. Ekkor egyrészt $ABDB^*$ paralelogramma, $AB^*\#BD$, és $B^*AM\sphericalangle = BMA\sphericalangle = \omega$, váltószögek, mert E, és így B^* is AC-nek B-t nem tartalmazó partján van, M pedig az AC szakaszon. Másrészt D a k és k^* metszéspontja. Így a következő szerkesztéshez jutottunk.

AC-nek, O-nak és k-nak a fentiek szerinti megszerkesztése után felmérjük a $CAB^*\sphericalangle = \omega$ szöget, és új szárára az $AB^* = f$ szakaszt. AB^* mint húr fölé OC sugarú k^* kört szerkesztünk, ennek k-val való metszéspontja D, végül B^* tükörképe AD felezőpontjára nézve B.

A kapott $ABCD$ négyszögben $AC = e$, $BD = AB^* = f$ és $BMA\sphericalangle = MAB^*\sphericalangle = \omega$, továbbá k átmegy B-n, mert k és k^*, mint egyenlő sugarú körök, egymás tükörképei a közös AD húrjuk felezőpontjára nézve, tehát a feltétel alapján $ABC\sphericalangle = \beta$.

B^* egyértelműen szerkeszthető és D létrejön, mert k-nak és k^*-nak van közös pontja: A.

k^* helyett AB^*-ra való k^{**} tükörképét használva újabb megoldást kapunk. A megoldások megfelelnek, ha D az AC egyenes B^*-ot tartalmazó partján adódik, számuk legfeljebb 2.

3. feladat. *Alakítsuk két polinom szorzatává az*

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

kifejezést.

I. megoldás. Olyan felbontást keresünk, melyben mindkét tényező-polinom másodfokú és x^2 együtthatója mindkettőben 1. Feladatunk a további p, q, illetőleg r, s együtthatók meghatározása úgy, hogy

$$\begin{aligned}(x^2+px+q)\cdot(x^2+rx+s) &= x^4+(p+r)x^3+(q+pr+s)x^2+(qr+ps)x+qs = \\ &= x^4+x^3+x^2+x+1.\end{aligned}$$

azonosság legyen. Ez teljesül, ha x^3, x^2, x együtthatója és az x-et nem tartalmazó tag a két oldalon rendre egyenlő, azaz, ha

$$\begin{array}{llll} (1) & p+r=1, & (2) & q+pr+s=1, \\ (3) & qr+ps=1, & (4) & qs=1. \end{array}$$

(3)-at q-val megszorozva, (1) és (4) felhasználásával kiküszöbölhetjük r-et és s-et. (1)-ből $r = 1 - p$, így

$$q^2r + qps = q^2(1-p) + p = q,$$
$$q^2 - q - p(q^2-1) = (q-1)(q-pq-p) = 0. \tag{5}$$

Ez mindenesetre teljesül, ha $q = 1$, amikor (4)-ből $s = 1$, (2)-ből $pr = -1$, és (1)-et is tekintetbe véve p és r a

$$(z-p)(z-r) = z^2 - (p+r)z + pr = z^2 - z - 1 = 0 \tag{6}$$

[1]Az ábrán E pótlandó.

egyenlet gyökei, tehát az $(1+\sqrt{5})/2$ és $(1-\sqrt{5})/2$ értékek. Ezekkel fennáll a

$$P(x)=x^4+x^3+x^2+x+1=\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x+1\right)$$

azonosság. Ezzel megkaptunk egy kívánt alakú felbontást.

Megjegyzések. 1. Egy első és egy harmadfokú, valós együtthatós tényezőre való felbontás nem létezik, mert különben volna $P(x)$-nek valós 0-helye, de az a talált felbontás valamelyik tényezőjének is 0-helye volna. Ámde mindkét tényező diszkriminánsa negatív, s így egyiknek sincs valós 0-helye.

2. Világos, hogy $q=1$ választás mellett a föntin kívül csak olyan, két másodfokú valós együtthatós tényezőből álló felbontás nyerhető, amelyik abból az egyik tényezőnek egy 0-tól különböző c számmal, a másiknak $1/c$-vel való szorzásával keletkezik. Ha viszont a $q-pq-p=0$ egyenletből indulunk ki, akkor (2)-ből pl. p-re negyedfokú egyenletet nyerünk, ami teljes négyzetté kiegészítésén keresztül másodfokú tényezőkre bontható, de azok egyikének sincs valós 0-helye. Így nincs a fentitől lényegesen különböző, valós együtthatós felbontás másodfokú tényezőkre sem.

II. megoldás. A polinomot x^2+1 hatványai szerint rendezhetjük:

$$P(x)=x^4+1+x(x^2+1)+x^2=(x^2+1)^2+x(x^2+1)-x^2.$$

Egészítsük ki az első két tagot teljes négyzetté, így két négyzet különbsége keletkezik, amit már szorzattá alakíthatunk:

$$P(x)=\left(x^2+1+\frac{1}{2}x\right)^2-\frac{5}{4}x^2=\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\cdot\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right).$$

Megjegyzések. 1. Az eljárás általában alkalmazható $x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ alakú, ún. szimmetrikus polinomokra, és nem különbözik lényegesen attól a szokásos eljárástól, amely szerint a polinom $1/x^2$-szeresét az $y=x+\dfrac{1}{x}$ új változóval fejezzük ki.

Az itt vázolt úton mindig eljutunk két, valós együtthatós másodfokú tényezőre bontáshoz, ha $a^2-4b+8\geqq 0$.

2. Az I. megoldás gondolatmenete is alkalmazható az említett általánosabb esetben, és célra vezet, bármilyen értékek is az együtthatók.

Lőrincz Pál–Bakos Tibor–Tusnády Gábor–Surányi János