1. feladat. *Hozzuk egyszerűbb alakra a következő összeget:*

$$S = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k + 2 \cdot 3 \cdot \ldots (k+1) + 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (k+2) + \ldots$$
$$+ n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1).$$

(Az összeg n tagból áll, minden tagja k számú tényező szorzata.)

Megoldás. Tüntessük fel az összeg jele mellett indexben tagjainak számát, így a fenti kifejezés $S_n \cdot n = 2$ és 3 esetén az összeg így alakítható:

$$S_2 = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1) = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k(1 + k + 1) =$$
$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{k+1},$$
$$S_3 = S_2 + 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1) \cdot (k+2) =$$
$$= 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (k+2) \cdot \left(\frac{2}{k+1} + 1 \right) = \frac{3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (k+2) \cdot (k+3)}{k+1}.$$

Az utolsó alak számlálója mindkét esetben $k+1$ egymás utáni természetes szám szorzata, első tényezőnek véve az összeg tagjainak számát, a nevező pedig $k+1$. Ebből azt sejtjük, hogy

(1)
$$S_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k)}{k+1}.$$

(Könnyű látni, hogy ez $n = 1$ esetén is érvényes.) Ezt fogjuk bizonyítani a teljes indukció módszerével.

Tegyük fel, hogy (1) helyes n-nek valamilyen i értékére. Ekkor öröklődik $n = i + 1$-re is, mert

$$S_{i+1} = S_i + (i+1) \cdot (i+2) \cdot \ldots \cdot (i+k) =$$
$$= \frac{i \cdot (i+1) \cdot \ldots \cdot (i+k)}{k+1} + (i+1) \cdot (i+2) \cdot \ldots \cdot (i+k) =$$
$$= (i+1) \cdot (i+2) \cdot \ldots \cdot (i+k) \cdot \left(\frac{i}{k+1} + 1 \right) =$$
$$= \frac{(i+1) \cdot (i+2) \cdot \ldots \cdot (i+k)(i+k+1)}{k+1},$$

tehát (1) helyes minden pozitív egész n-re. Másrészt (1) – mint egytagú kifejezés – egyszerűbbnek tekinthető az eredeti, adott alaknál. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés. A speciális osztályok matematikai gyakorlatainak anyagában szerepelnek a kombinatorika elemi fogalmai és feladatai. Ezek felhasználásával eredményünket az alábbiak szerint értelmezhetjük.[1]

A talált

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1) + \ldots + n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1) =$$
$$= \frac{n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k)}{k+1}$$

egyenlőséget $k!$-sal osztva a bal oldal tagjaiban felismerjük azoknak a k-ad osztályú kombinációknak a számát, amelyeket rendre k, $k+1$, $\ldots$, $n+k-1$ (különböző) elemből lehet képezni, a jobb oldalon pedig $n+k$ elem $k+1$-ed osztályú kombinációinak számát. Azt kaptuk tehát, hogy

$$C_k^{(k)} + C_{k+1}^{(k)} + \ldots + C_{n+k+1}^{(k)} = C_{n+k}^{k+1},$$

illetőleg a másik szokásos jelöléssel

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n+k+1}{k} = \binom{n+k}{k+1}.$$

[1] Az általános tantervű osztályok tanulói részére ajánljuk: *Kürschák J.–Hajós Gy.–Neukomm Gy.–Surányi J.:* Matematikai versenytételek I., 3. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965, 26. o.

Gondoljunk konkrétan az 1, 2, …, $n+k$ *számok*ból képezhető $k+1$-ed osztályú kombinációkra. Igy a bal oldal a kombinációk számát legkisebb számuk szerint csoportokba foglalva adja meg. Az egymás utáni tagok azoknak a kombinációknak a számát adják, amelyeknek legkisebb száma rendre

$$n, \qquad n-1, \qquad \ldots, \qquad 1$$

ekkor ugyanis a további k számot a nagyobbakból választjuk minden lehetőség szerint, azok száma pedig rendre

$$k, \qquad k+1, \qquad \ldots, \qquad n+k-1.$$

$n+1$-et már nem választhatjuk a $k+1$-ed osztályú kombináció legkisebb számának.

Hasonlóan mondhatjuk, hogy a bal oldal egymás utáni tagjai azoknak a kombinációknak a számát jelentik, amelyek legnagyobb száma rendre

$$k+1, \qquad k+2, \qquad \ldots, \qquad k+n.$$

2. feladat. *Milyen összefüggés áll fenn A és p között, ha*

$$A=\frac{x^2-3y^2}{3x^2+y^2}, \tag{2}$$

továbbá

$$\frac{pxy}{x^2-(2+p)xy+2py^2}-\frac{y}{x-2y}=\frac{1}{2}? \tag{3}$$

Megoldás. Az $x=y=0$ esetet nyilvánvalóan ki kell zárnunk, de nem lehet $y=0$, $x\neq 0$ sem, mert akkor (3) nem teljesül, ha pedig $x=0$, $y\neq 0$, akkor $A=-3$, (2) pedig az $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ azonosságba megy át, és így p akármi lehet, nem áll tehát fenn összefüggés A és p közt. Tegyük fel a továbbiakban, hogy sem x, sem y nem 0. Feltesszük továbbá, hogy a (3)-beli nevezők egyike sem 0. Az első nevező szorzattá alakítható: $(x-2y)(x-py)$, tehát $x\neq 2y$, $x\neq py$. A törteket y^2-nel, illetőleg y-nal egyszerűsítve (2) jobb oldala és (3) bal oldala az $x/y=t$ változó kifejezéseként írható:

$$A=\frac{t^3-3}{3t^2+1}, \qquad (2') \qquad \frac{pt}{(t-2)(t-p)}-\frac{1}{t-2}=\frac{1}{2}. \qquad (3')$$

(3')-t szorozva $2(t-2)(t-p)$-vel, rendezés után

$$t^2-3pt=t(t-3p)=0.$$

Eszerint, mivel $t\neq 0$, a (3) feltevés azt fejezi ki, hogy t értéke csak $3p$ lehet. Így a keresett összefüggés (2')-ből

$$A=\frac{9p^2-3}{27p^2+1}.$$

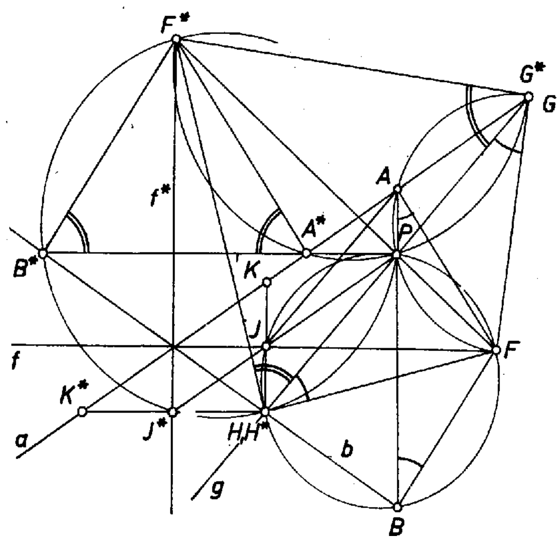
3. feladat. *Adott a síkban két metsző egyenes, a és b, és egy pont, P. A két egyenes egyik szögfelezőjét jelöljük f-fel. (P nincs rajta sem a-n, sem b-n, sem az egyenesek szögfelezőin.) Messe a P-n átmenő, t-re merőleges egyenes a-t az A pontban. Állítsunk A-ban az a-ra merőleges egyenest, messe ez f-et az F pontban. Végül állítsunk merőlegest P-ben az FP egyenesre. – Bizonyítsuk be, hogy P felezi az FP-re merőleges egyenesnek az a és b közé eső szakaszát.*

I. megoldás. Messe a kérdéses merőleges a-t G-ben, b-t H-ban, ekkor elég belátnunk az FGH és FHG szögek egyenlőségét, hiszen így FGH egyenlő szárú háromszög, és FP magassága felezi a GH alapot. Válasszuk a betűzést úgy, hogy a és b közül a P-hez közelebbi legyen a.

Legyen először f az a és b közti négy szögtartomány közül annak a felezője, amelyikben P benne van, és messe az f-re merőleges PA egyenes b-t B-ben. P az AB szakaszon van, F ugyanebben a szögtartományban adódik, és G az FP egyenesnek azon a partján, amelyiken A van, B és H pedig a másik partján. $FPAG$ és $FPHB$ húrnégyszögek, mert az FG szakasz A-ból és P-ből, FH pedig P-ből és B-ből derékszögben látszik, hiszen B az A tükörképe f-re, és így FB merőleges b-re. Mivel még P a GH szakasz belső pontja, azért

$$FGH\sphericalangle=FGP\sphericalangle=FAP\sphericalangle=FBP\sphericalangle=FHP\sphericalangle=FHG\sphericalangle.$$

Ezt akartuk bizonyítani, ebből – mint láttuk – az állítás egyszerűen következik.



f-ként a P-t tartalmazó a, b szögtartománnyal szomszédos szögtartományok felezőjét véve – legyen ez f^*, és az így szerkesztett pontok A^*, F^*, G^*, H^* és B^*, meggondolásunk csak abban változik, hogy F^*P szétválasztja az A^*, G^* pontpárt és hogy A^* van a PB^* szakaszon. A megfelelő húrnégyszögekből ekkor is

$$F^*G^*H^*\sphericalangle = F^*G^*P\sphericalangle = 180^\circ - F^*A^*P\sphericalangle = F^*A^*B^*\sphericalangle = F^*B^*A^* =$$
$$= F^*B^*P\sphericalangle = F^*H^*P\sphericalangle = F^*H^*G^*\sphericalangle.$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. Az állítás fordítottját bizonyítjuk, megmutatjuk, hogy ha P felezi a g egyenesnek az a és b közé eső GH szakaszát, akkor FP merőleges g-re. Ebből az állítás akkor következik, ha azt is belátjuk, hogy P a rajta átmenő egyenesek közül csak egynek felezi az a és b közti szakaszát. Ez abból adódik, hogy pl. G-t b-nek P-re vett tükörképe metszi ki a-ból.

Messe a H-n átmenő, f-re merőleges egyenes f-et J-ben, a-t K-ban. H és K tükrös pár f-re, ezért J felezi HK-t, és mivel még $HK \parallel AP$, azért PAJ a KHG háromszög középháromszöge, $PJ \parallel a$ és $AJ \parallel g$. Így F a PAJ háromszög magasságpontja, hiszen itt metszi egymást a J-ből és A-ból kiinduló magasságvonal. Ezért PF merőleges AJ-re és a vele párhuzamos g-re is, amint állítottuk.

Ezzel a bizonyítást befejeztük. Bizonyításunk mindkét szögfelezőre egyformán érvényes.

Lőrincz Pál – Tusnády Gábor