1. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy bármely társaságban található két olyan ember, akiknek abban a társaságban ugyanannyi ismerősük van.*

I. megoldás. Legyen a társaság tagjainak száma n; mivel társaságról van szó, $n \geqq 2$. Ekkor a társaság egy tagjának 0, vagy 1, vagy …, vagy $n-1$ ismerőse lehet jelen. Nem lehet azonban olyan is, akinek nincs ismerőse a társaságban, meg olyan is, akinek $n-1$ ismerőse van, hiszen az utóbbinak a társaság minden tagja ismerőse, és ez legalább 1 ismerőst jelent, mert $n \geqq 2$. Így, ha mindenki megmondja, hány ismerőse van jelen, akkor n ember legfeljebb $n-1$ különböző számot mondhat, tehát legalább ketten ugyanazt a számot mondják, vagyis ugyanannyi ismerősük van jelen.

II. megoldás. Legyen a társaság n-tagú; $n \geqq 2$, mert 1 embert nem mondunk társaságnak. Ekkor egy embernek 0, vagy 1, vagy …, vagy $n-1$ ismerőse lehet jelen, ez összesen n lehetőség, tehát mindegyiknek elő kellene fordulnia, ha mindenkinek más-más számú ismerőse volna jelen. De ekkor a senkit sem ismerő távozásával senki ismerőseinek a száma nem változnék, tehát a visszamaradó $n-1$ (legalább 1) ember közül is mindenkinek más-más számú ismerőse volna jelen. Ekkor azonban ezek közt is volna, akinek nincs jelen ismerőse. Mivel ennek az eltávozott sem ismerőse, tehát az eredeti társaságban legalább 2 embernek nem lett volna ismerőse, holott éppen azt tettük fel, hogy eredetileg mindenkinek más számú ismerőse volt jelen. Ez a feltevés tehát helytelen-nek bizonyult, s így a feladat állítása a helyes.

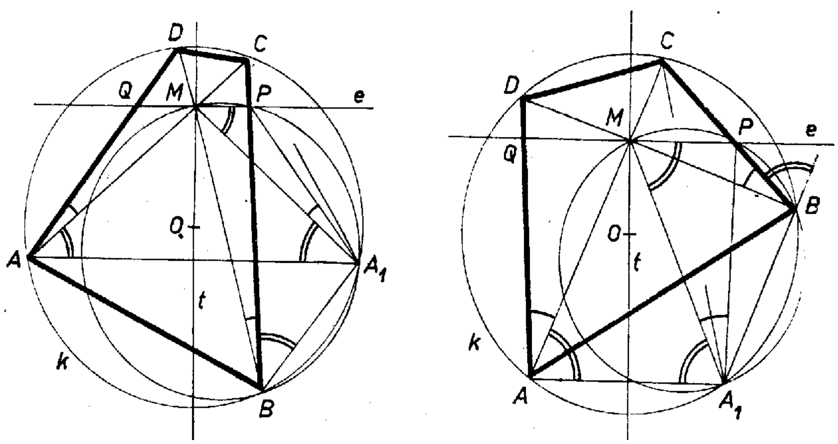
2. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy húrnégyszög átlóinak M metszéspontján átmenő egyenesnek a négyszög belsejébe eső szakaszát M felezi, akkor M felezi a körülírt körnek az említett egyenesre eső húrját is.*

I. megoldás. Legyen az e egyenesnek a négyszög belsejébe eső szakasza PQ, és M felezze PQ-t. Ha e azonos a négyszög egyik átlójával, akkor a feladat állítása semmitmondó. Feltehetjük tehát, hogy e a két átló között halad, így a négyszöget szemközti oldalaiban metszi. Válasszuk úgy a betűzést, hogy P a négyszög BC, Q a DA oldalszakaszán legyen. Tükrözzük az A csúcsot a PQ szakasz t felező merőlegesére, kapjuk az A_1 pontot. Megmutatjuk, hogy A_1 rajta van az $ABCD$ négyszög köré írt k körön.

$AA_1 \parallel PQ$, hiszen mindkettő merőleges t-re. $PMA_1\sphericalangle = MA_1A\sphericalangle$, mert váltószögek, $MA_1A\sphericalangle = MAA_1\sphericalangle$ a tükrözés miatt, és ez utóbbi azonos a CAA_1 szöggel, tehát $PMA_1\sphericalangle = CAA_1\sphericalangle$. (Az 1.$a$ - 1.b ábrákon t szétválasztja A-t és B-t.) Az A_1, B, P, M pontok egy körön vannak, hiszen

$$PBM\sphericalangle = CBD\sphericalangle = CAD\sphericalangle = MAQ\sphericalangle = MA_1P\sphericalangle,$$

egyrészt a kerületi szögek tétele, másrészt a tükrözés miatt, és mert az A_1, B pontok az MP egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak. Ha az A és B pontok az A_1C egyenes azonos oldalán vannak, akkor a B és M pontok is ugyanazon az oldalán vannak az A_1P egyenesnek, így az A_1P szakasz a B és M pontokból egyenlő szögben látszik.



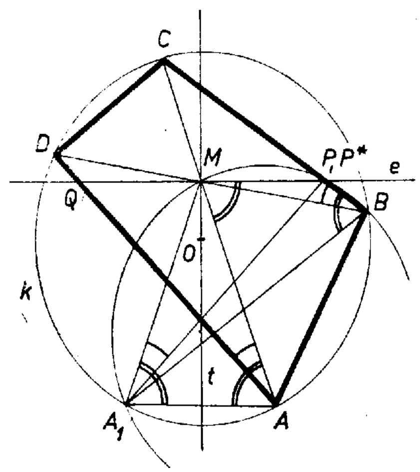
1.a és 1.b ábra

Mivel A_1BP és A_1BC szögek azonosak, a PMA_1 és CAA_1 szögek pedig egyenlőek, az A_1C szakasz is ugyanakkora szögben látszik az A és B pontokból, A_1 tehát valóban rajta van az A, B, C pontok által meghatározott k körön.

Ugyanezt kapjuk, ha az A_1C egyenes elválasztja az A és B pontokat (1.b ábra). Ebben az esetben az A_1P egyenes is elválasztja az M és B pontokat, az A_1BP és PMA_1 szögek tehát 180°-ra egészítik ki egymást, így az A_1BC és CAA_1 szögek is 180°-ra egészítik ki egymást, és A_1 most emiatt lesz a k körön.

Hasonlóan adódik állításunk, ha A és B a t-nek ugyanazon oldalán van (2. ábra).

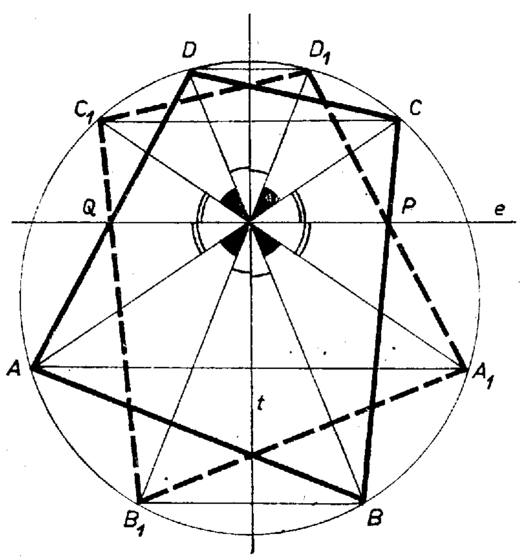
Mivel A_1 a k körön van, az AA_1 szakasz felezőmerőlegese, a t egyenes a k kör átmérője, így felezi a rá merőleges e egyenesre eső húrt, amint azt bizonyítanunk kellett.



2. ábra

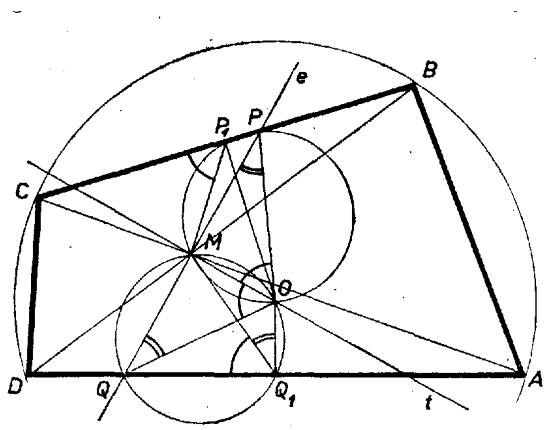
Megjegyzések. 1. Lényegében ugyanígy halad a megoldás, ha a t egyenest eleve az M-en átmenő átmérőnek vesszük fel (2. ábra). Ebben az esetben A_1 nyilván a k körre kerül, ellenben bizonyítanunk kell, hogy PQ is merőleges t-re. Mivel ezt nehéz közvetlenül belátni, a versenyzők többsége a feladat állításának a fordítottját bizonyította, hogy ti. ha egy az M-en átmenő e egyenesnek M a körre eső húrját felezi, akkor felezi a négyszögbe eső szakaszát is. Ha M és k kör O középpontja azonos, akkor - mint az könnyen látható - minden egyenesnek megvan mindkét tulajdonsága. Ha M és O nem azonos, akkor M nyilván akkor felezi az e egyenesre eső húrt, ha $e \perp OM$. Ha tehát belátjuk egyrészt, hogy ebből következik, hogy M felezi az e egyenes négyszögbe eső szakaszát, másrészt, hogy olyan egyenes is csak egy van, amelyiknek a négyszögbe eső szakaszát M felezi, akkor e kettő együtt kiadja a feladat állításának a bizonyítását. Az első rész a fenti megoldáshoz hasonló módon bizonyítható: mivel $PMA_1\sphericalangle = A_1AC\sphericalangle$, az A_1, B, P, M pontok egy körön vannak, tehát $PA_1M\sphericalangle = PBM\sphericalangle$, viszont ez teljesül a Q pont tükrözéséből származó P^* pontra is: $P^*A_1M\sphericalangle = PBM\sphericalangle$, P^* tehát azonos P-vel. A második rész bizonyításával kapcsolatban a II. megoldás első mondataira utalunk.

2. Ha az egész négyszöget tükrözzük az OM egyenesre, akkor P és Q a megfelelő oldalak metszéspontja lesz, és azt kell megmutatnunk, hogy $PQ \perp OM$. Valóban, az M pontban keletkezett 12 szög közül a 3. ábrán azonosan jelzettekről könnyen kimutatható, hogy egyenlőek, amiből már következik az állításunk. Ebben az esetben azonban fel kell használnunk, hogy olyan egyenes, amelyen levő húrt M felezi, ill. olyan egyenes, amelynek a négyszögre eső szakaszát M felezi, csak egy van, mert csak ennek belátása után következik a feladatunk állítása abból, hogy az általunk adott konstrukció mellett a PQ egyenesnek mindkét tulajdonsága megvan.



3. ábra

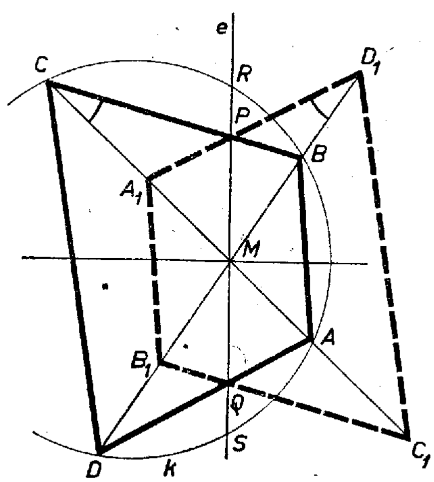
3. Azt viszont, hogy ha M felezi PQ-t, akkor a PQ szakasz t felező merőlegese átmegy a k kör középpontján, tükrözés nélkül is beláthatjuk (4. ábra). Legyen Q_1 az AD, P_1 a BC szakasz felezőpontja. Feltehetjük, hogy a Q_1 pontból a DM szakasz látszik hegyesszög alatt, ekkor az AMD, BMC háromszögek hasonlósága miatt a P_1 pontból ugyanakkora α szög alatt látszik a CM oldal. Attól függően, hogy a P, ill. a Q pont a P_1C, ill. Q_1D szakaszra esik-e vagy sem, az MP, ill. MQ szakasz vagy α, vagy $180° - \alpha$ szög alatt látszik a P_1, ill. Q_1 pontokból.



4. ábra

Keressük meg a t egyenesnek az e egyenes A és B csúcsokat tartalmazó oldalára eső félegyenesén azt az O pontot, ahonnan az MP és MQ szakaszok α szög alatt látszanak. Akkor az O, P, P_1, M, ill. O, Q, Q_1, M pontok egy-egy körön lesznek, melyeknek OP és OQ átmérői, az OP_1P, OQ_1Q szögek tehát derékszögek, így O a k kör középpontjával azonos.

II. megoldás. Tükrözzük az $ABCD$ négyszöget és a köré írható k kört a négyszög átlóinak M metszéspontjára. Ha M mindkét átlót felezi, a négyszög és a k kör önmagába megy át, ebben az esetben az M ponton átmenő egyeneseknek a négyszögbe és a körbe eső szakaszát is felezi M, állításunk tehát igaz. Ha M csak egy átlót felez, válasszuk úgy a betűzést, hogy ez az AC átló legyen, és teljesüljön, hogy $BM < MD$. Akkor a tükrözés során az A és C csúcsok helyet cserélnek, a B csúcs és a belőle kiinduló AB, BC oldalak a négyszög belsejébe, a D csúcs és a belőle kiinduló CD, DA oldalak a négyszögön kívülre kerülnek, így csak az AC átlónak felezi M a négyszögbe eső darabját, AC viszont egyben a k-nak is húrja, állításunk tehát ismét nyilvánvaló.



5. ábra

A továbbiakban feltehetjük tehát, hogy M egyik átlót sem felezi. Válasszuk úgy a betűzést, hogy az AC átlón A, a BD átlón B legyen az M-hez közelebbi csúcs (5. ábra). A tükrözés során kapott A_1 és B_1 csúcs az eredeti négyszög belsejében lesz, a C_1, D_1 csúcs pedig azon kívülre kerül, így csak a BC és A_1D_1, ill. DA és B_1C_1 szakaszok metszhetik egymást a tükrözött és az eredeti négyszög kerületén. Legyenek a metszéspontok P és Q, ekkor csak a PQ egyenesnek felezheti M a négyszögbe eső szakaszát. A kapott BD_1P és A_1CP háromszögek hasonlóak, hiszen P-nél levő szögük egyenlő és

$$A_1CP\sphericalangle = ACB\sphericalangle = ADB\sphericalangle = A_1D_1B_1\sphericalangle = PD_1B\sphericalangle,$$

emiatt

$$\frac{A_1P}{PC} = \frac{BP}{PD_1}.$$

A tükrözés miatt viszont $A_1P = AQ$ és $PD_1 = QD$, tehát

$$AQ \cdot QD = BP \cdot PC,$$

azaz a P és Q pontoknak a k körre vonatkoztatott hatványuk egyenlő. (Ismeretes, hogy egy k körhöz adott P pontból húzott szelő darabjainak szorzata független a szelő választásától - ezt a szorzatot nevezzük a P pont k körre vonatkozó hatványának.) Ebből már következik a bizonyítandó állítás, hiszen ha a PQ egyenes a k kört az R, S pontokban metszi, és $PS > QS$, akkor

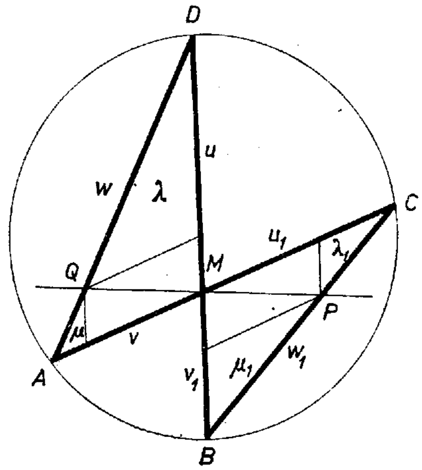
$$RP \cdot PS = RQ \cdot QS,$$

és mindkét oldalból $RP \cdot QS$-t levonva kapjuk, hogy

$$RP(PS - QS) = (RQ - RP)QS,$$

ahol $PS - QS = PQ = RQ - RP$, tehát valóban $RP = QS$, azaz $RM = MS$.

Megjegyzések. 1. Azt, hogy a P, Q pontok k-ra vonatkozó hatványa egyenlő, tükrözés nélkül is beláthatjuk.



6. ábra

Húzzunk P-n és Q-n át párhuzamosakat az AC, BD átlókkal (6. ábra), így az egymáshoz hasonló ADM, BCM háromszögek mindegyikét egy paralelogrammára és két háromszögre vágtuk fel. A keletkezett négy kis háromszög hasonló az eredeti háromszögekhez, a paralelogrammák is hasonlók, és mivel PM és MQ átlóik egyenlők, egybevágóak is. Legyenek az ADM és BCM háromszögek oldalai rendre u, v, w, ill. u_1, v_1, w_1, és a DQ, QA, ill. CP, PB alapú kis háromszögek oldalai a megfelelő nagy háromszögek oldalainak rendre λ, μ, ill. λ_1, μ_1-szeresei. Az AC átlóval párhuzamos oldalt a DQ és PB alapú, a BD átlóval párhuzamos oldalt pedig a QA, PC alapú háromszögben felírva kapjuk, hogy

$$\lambda v = \mu_1 u_1; \qquad \mu u = \lambda_1 v_1,$$

ezeket összeszorozva

$$\lambda\mu u y = \lambda_1\mu_1 u_1 v_1,$$

Az ADM, BCM háromszögek hasonlósága miatt

$$u : w = u_1 w_1 \quad \text{és} \quad v : w = v_1 : w_1,$$

ezt a két aránypárt összeszorozva kapjuk, hogy

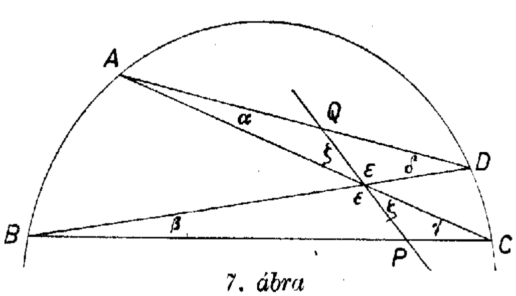
$$uv : w^2 = u_1 v_1 : w_1^2.$$

Ebből következik, hogy

$$\lambda w \cdot \mu w = \lambda_1 w_1 \cdot \mu_1 w_1,$$

ami épp a bizonyítandó egyenlőség:

$$DQ \cdot QA = CP \cdot PB.$$



7. ábra

Beláthatjuk ezt a szinusztétel felhasználásával is (7. ábra):

$$\frac{BP}{QD} = \frac{BP}{MP} : \frac{QD}{QM} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\beta} : \frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta} = \frac{\sin\zeta}{\sin\alpha} : \frac{\sin\zeta}{\sin\gamma} = \frac{AQ}{QM} : \frac{PC}{MP} = \frac{AQ}{PC}.$$

2. Ha felhasználjuk, hogy két egymást metsző körre azon pontok mértani helye, amelyeknek a két körre vonatkozó hatványa egyenlő, a két kör metszéspontjain átmenő egyenes, akkor megoldásunk rövidebben is befejezhető. A P pontnak a k körre vonatkozó hatványa $BP \cdot PC$, a k' körre vonatkozó hatványa $A_1P \cdot PD_1$, mivel ez a két szorzat az A_1BD_1C húrnégyszögben egyenlő, P - és hasonló módon Q is - rajta van a k és k' körök hatványvonalán, így a két kör centrálisa merőleges PQ-ra, a tükrözés miatt átmegy M-en, és felezi a k kör PQ egyenesre eső húrját.

3. feladat. *a) Keressünk meg minden olyan természetes számot, amelynek négyzetében mindegyik számjegy helyébe ugyanazzal a d pozitív számmal kisebb jegyet írva, a keresettnél d-vel kisebb természetes szám négyzetét kapjuk.*
b) Hány megoldása van a feladatnak tetszés szerinti alapú számrendszerben?

Megoldás. a) Legyen a keresett szám x, a nála d-vel kisebb szám y, és x^2 számjegyeinek száma k. Jelöljük a k darab 1-essel felírt számot C-vel, ekkor a feladat szerint

$$x^2 - y^2 = d \cdot C, \quad (1) \qquad x - y = d. \quad (2)$$

A bal oldalon $x^2 - y^2 = (x-y)\cdot(x+y) = d(x+y)$, tehát $d(x+y) = d \cdot C$, amit d-vel osztva $(d > 0)$

(3) $$x + y = C.$$

Így $x > y$ miatt $2x > C$, azaz $4x^2 > C^2$. Viszont x^2 és C jegyeinek száma k, ezért $C \geqq 10^{k-1}$, $C^2 \geqq 10^{2k-2}$, és $10^k > x^2$, tehát

$$4 \cdot 10^k > 4x^2 > C^2 \geqq 10^{2k-2}.$$

A két szélső tagból kapott egyenlőtlenség alapján $4 > 10^{k-2}$, amiből következik, hogy $k \leqq 2$. Nem lehet azonban $k = 1$, mert $C = x + y > 1$, tehát $k = 2$, $C = 11$, és x^2 kétjegyű szám, tehát x egyjegyű. Mivel így $x + y = 11$, azért $10 > x > y$, és (2)-re is tekintettel x, y és d szóba jövő értékei:

x=	6,	7,	8,	9,
y=	5,	4,	3,	2,
d=	1,	3,	5,	7.

Ezekkel

$x^2=$	36	49,	64,	81,
$y^2=$	25,	16,	9,	4.

A harmadik és negyedik értékrendszer esetében x^2 második számjegye kisebb d-nél, ezek nem megoldásai a feladatnak. Az első két értékrendszer a feladat minden követelményét kielégíti, a keresett számok tehát 6 és 7.

b) Legyen a számrendszer alapszáma a. Az előző meggondolások egy részét átvehetjük, a többjegyű számokat az a-alapú számrendszerben értve. (1), (2) és (3) továbbra is érvényes, és a $4 > 10^{k-2} = (1 \cdot a + 0)^{k-2}$ egyenlőtlenség is érvényes marad, tehát

(4) $$a^{k-2} < 4,$$

és $k > 1$, hiszen $C = x + y > 1$ is változatlanul fennáll.

Nem lehet a sem 2, sem 3. Ugyanis a d számjegy $a-1$-nél kisebb, mert különben x^2-ből az ugyanannyi $a-1$ jegyből álló számot levonva nem kaphatunk pozitív maradékot. Ilyen pozitív d nincs, ha $a = 2$; az $a = 3$ esetben pedig d csak 1 lehetne. Ekkor a (3)-ból és (2)-ből adódó

$$x = \frac{C + d}{2}$$

összefüggés szerint C páratlan, így k értéke nem lehet 2, tehát (4)-et figyelembe véve $k = 3$, így $x = 7$, és 7^2 a 3-alapú számrendszerben már több mint 3-jegyű.

Minden $a \geqq 4$ alapszám esetében (4) alapján $k \leqq 2$, tehát $k = 2$, $C = a + 1$ és x^2 kétjegyű, ezért $x^2 < a^2$, x egyjegyű, azaz $x < a$.

(5) $$x + y = a + 1$$

és $x > y$ alapján y szóba jövő értékei $2, 3, 4, \ldots, a_0$, ahol a_0 az a legnagyobb egész szám, amelyre még $a_0 < a + 1 - a_0$, azaz $2a_0 < a + 1$.

Ha a páros, $a = 2u$, akkor $a_0 = u = \frac{a}{2}$, ha a páratlan, $a = 2u + 1$, akkor $a_0 = u = \frac{a-1}{2}$, tehát a_0 mindenképpen az a legnagyobb egész szám, amelyik még nem nagyobb $\frac{a}{2}$-nél, a szokásos jelöléssel $a_0 = \left[\frac{a}{2}\right]$.

Minden ilyen y esetén $x=a+1-y$ és $d=x-y=a+1-2y$ kielégíti (1)-et és (2)-t, továbbá x^2 kétjegyű, hiszen $x>\dfrac{C}{2}>\dfrac{a}{2}$ miatt

$$x^2>\frac{a^2}{4}\geqq a.$$

Az x, y, d számhármasok akkor megoldásai feladatunknak, ha x^2 mindkét számjegye külön-külön d-vel nagyobb y^2 megfelelő jegyénél. Ha ez a feltétel a második jegyekre teljesül, vagyis az

$$x^2=y^2+dC=y^2+(d+ad)$$

összeadást jegyenként végezve (először a d, majd az ad tagot adva hozzá) y^2+d első számjegye ugyanaz, mint y^2 első jegye, akkor teljesül az első jegyekre is. Így ugyanis nem viszünk át maradékot, az ad tag az y^2-nek a helyi értékű jegyét növeli d-vel, és x^2 első jegyét adja, mert itt nem lehet maradékátvitel, hiszen $x^2<a^2$.

A második jegyek nagyságviszonyának vizsgálatát megkönnyíti a következő észrevétel: Legyen $z=y-1$, ekkor x^2 és z^2 második számjegye megegyezik, hiszen így $x+z=a$, tehát $x^2-z^2=(x+z)\cdot(x-z)=a(x-z)$, különbségük osztható a-val. Elegendő tehát azoknak az y-értékeknek a számát meghatározni, melyek négyzetének második jegye kisebb a náluk 1-gyel kisebb z szám négyzetének második jegyénél. Ez $z<y$ miatt csak úgy lehetséges, hogy z^2 első jegye kisebb y^2 első jegyénél, mégpedig pontosan 1-gyel, hiszen $y^2-z^2=y+z=2y-1<x+y-1=a$.

Eszerint az $y=2,\ 3,\ \ldots,\ a_0$ számok négyzetében első jegyként minden számjegy előfordul a_0^2 első jegyéig ($a>4$ esetén 0 is), és minden előforduló kezdő számjegyhez pontosan 1 megfelelő y-érték tartozik, mégpedig a legkisebb azok közül a számok közül, amelyeknek négyzete az illető számjeggyel kezdődik. Ha y^2 első számjegye 0, akkor y-hoz nem tartozik megoldása a feladatnak, hiszen ekkor a $z=y-1\geqq 1$ szám négyzetének második számjegye mindig kisebb y^2 második jegyénél. Így a feladatnak megfelelő y-értékek (és x, y, d értékrendszerek) száma egyenlő a_0^2 első számjegyével. Ezt megadja az $a_0^2:a$ hányados egész része, tehát a megoldások száma

$$\left[\frac{1}{a}a_0^2\right]=\left[\frac{1}{a}\left[\frac{a}{2}\right]^2\right].$$

Eredményünk megfelel az a) részben kapott eredményünknek, hiszen $a=10$ esetén $a_0=5$, és a_0^2 első jegye 2.

Tusnády Gábor