A hat számjegy közül egyik sem zérus, mindegyikük egyjegyű osztója 190 512-nek, ami különböző törzsszámok hatványainak szorzataként 2^4, 3^5, 7^2. Eszerint az 5-ös kivételével mindegyik számjegy előfordulhat a kívánt N négyzetszámban, hiszen a 2, 3 és 7 tényezőkből minden más jegy előállítható szorzatként, és lehet 1-es is a jegyek között. Azt is látjuk, hogy N-nek két számjegye 7-es, hiszen $7 \cdot 2 = 14$ már nem számjegy; Így a további négy számjegy szorzata $abcd = 2^4 \cdot 3^5$.

Ezek közül legalább egy osztható 9-cel, mert akkor is két 3-as törzstényező jutna egyikükbe, ha mind a négyben lenne egy 3-as tényező. És mivel $9 \cdot 2 = 18$ már nem számjegy, azért a további négy jegy egyike, mondjuk $d = 9$. Így a négy 2-es tényező az a, b, c jegyekre oszlik el, tehát legalább az egyikükre legalább kettő jut, és mivel $2^2 \cdot 3 > 9$, abban a jegyben nem szerepelhet 3-as tényező is, ezért még egy számjegy lesz $3^2 = 9$-es. Legyen ez c, akkor $ab = 2^4 \cdot 3 = 48$, ami két számjegy szorzatára csak egyféleképpen bontható: $6 \cdot 8$, tehát N számjegyei valamilyen sorrendben 6, 7, 7, 8, 9, 9.

A talált jegyekből képezhető legkisebb és legnagyobb számot fölírva

$$677\,899 \leq N \leq 998\,776, \tag{1}$$

amiből a négyzet n alapjára

$$824 \leq \sqrt{N} = n \leq 999. \tag{2}$$

N számjegyeinek összege 46, ami 9-cel osztva 1-et ad maradékul. Ezért N nem osztható 9-cel, n nem osztható 3-mal, és élesebben $n = 9 \pm 1$ alakú, számjegyeinek összegét 9-cel osztva 1-et vagy 8-at kapunk maradékul, hiszen $(9k \pm 2)^2 = 9m + 4$ és $(9k \pm 4)^2 = 9m + 7$ alakú, tehát mind magukat, mind a számjegyek összegét 9-cel osztva a maradék 4, ill. 7.

N egyjegyű végződése a találtak közül csak 6 és 9 lehet. Továbbmenve a kétjegyű végződésre, a 6-os előtt csak páratlan jegy állhat, a 9-es előtt pedig csak páros, mert ha N végén 6-os áll, akkor páros az n is, ezért N osztható 4-gyel, tehát a kétjegyű végződése is, $10k + 6 = 10(k-1) + 16$, ami csak úgy adódik, ha $k - 1$ páros, azaz tízeseinek k száma páratlan; hasonlóan ha N végén 9-es áll, akkor n ilyen alakú: $2k + 1$, N pedig $4k(k+1) + 1 = 8m + 1 = 8(m-1) + 9$ alakú, a végéről a 9-est elhagyva 8-cal osztható számot kapunk, tehát N tízeseinek száma páros.

Négyzetszám adott kétjegyű végződése esetén az alap kétjegyű végződése csak négyféle lehet (kivéve, ha a négyzet végződése 00 vagy 25, ami itt nem jön szóba). Ha ugyanis A^2 és B^2 kétjegyű végződése egyezik – ahol A és B egészek és egyikük sem osztható 5-tel –, akkor különbségük osztható 100-zal:

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) = 100k = 4 \cdot 25 \cdot k.$$

Itt $A - B$ és $A + B$ közül csak az egyik lehet osztható 25-tel (ha ugyanis mindkettő osztható volna 5-tel, akkor A is, B is osztható volna vele és négyzetük vége 00 vagy 25 lenne). Másrészt mindegyikük páros (hiszen $A - B$ és $A + B$ egyező párosságúak, és szorzatuk osztható 2^2-nel), tehát vagy $A + B$, vagy $A - B$ osztható 50-nel. Eszerint ha egy 5-tel nem osztható c szám kétjegyű végződése 1 és 24 közé esik, akkor c^2, $(c+50)^2$, $(50-c)^2$ és $(100-c)^2$ kétjegyű végződése egyezik, és az alap más végződése esetén más a négyzet végződése.

Ezek szerint a következő kétjegyű végződések tartoznak össze:

$N-$ben	$n-$ben	$(2')$
76	24, 26, 74, 76;	$n \geq 889$;
96	14, 36, 64, 86;	$n \geq 883$;
69	13, 37, 63, 87;	$n \geq 883$;
89	17, 33, 67, 83;	$n \leq 988$.

Feltüntettük mindjárt azt a (2') egyenlőtlenséget is, amely (2) egyik felének helyére lép, miután az N végére lekötött számjegyek miatt (1) korlátai szűkebbé válnak.

Ezek szerint N-nek 76-ra végződése esetén n-ként csak 924, 926, 974 és 976 jön szóba, de egyik sem megoldás, mert 9-cel osztva maradékuk rendre 6, 8, 2 és 4, a 8-as maradék esetében pedig $926^2 = 857\,476$, meg nem engedett jegyek lépnek föl.

Hasonlóan a 96-os, 69-es, 89-es négyzetvégződés esetére (2') szerint rendre adódó 5, 5, ill. 7 db n érték közül csak a következő 4-nek a 9-es maradéka 1 vagy 8:

$$964; \quad 937; \quad 883 \quad \text{és} \quad 917,$$

és négyzetüket kiszámítva csak kettőjük megfelelő:

$$937^2 = 877\,969, \qquad 883^2 = 779\,689.$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések. 1. Miután a keresett szám 6, 7, 7, 8, 9, 9 jegyeit megállapítottuk, kereséséhez felhasználhatjuk az iskolai függvénytáblázatban található négyzettáblázatot is. A számunkra lehetséges négyjegyű négyzetkezdetek mellé kiírjuk az általuk egyértelműen meghatározott háromjegyű számot (ti. azok mellé, amelyeknek mind a négy jegye az N előírt jegyei közül való, valamint azok mellé, amelyek fölkerekítéssel adódhatnak egy a N jegyeivel alkotott számból):

N első négy jegye	n	Elbírálás	N első négy jegye	n	Elbírálás
6790..	824	–(1)	8780..	937	próbálni
6889..	830	nincs 0	8798..	938	–(2)
6989..	836	–(1)	8968..	947	próbálni
7797..	883	próbálni	8987..	948	–(2)
7868..	887	próbálni			

(1) jelentése: 4^2 vagy 6^2 vége 6, és csak egy 6-osunk van.
(2) jelentése: 8^2 vége 4, és nincs 4-es jegyünk.

Ezek közül ötöt négyzetük utolsó jegye miatt azonnal elhagyhatunk, a visszamaradó négy szám közül a négyzetreemelés pontos elvégzésével választhatjuk ki a megfelelőket, 883^2-t és 937^2-t.

Kellően indokolt rendszeres próbálgatásként ez is elfogadható, mivel a végzendő próbák számát jelentősen sikerült lecsökkenteni.

2. Az utóbbi próbákat egyszerűbbé tehetjük a következő típusú meggondolásokkal. Pl. 883^2 hatjegyű szám, egyrészt a négyzettáblázat 7797 adata szerint 779 650 és 779 750 közé esik. Másrészt kétjegyű végződése megegyezik 83^2 kétjegyű végződésével, ami a 8,3-es sorban a 0 fejű oszlop *pontos* 68,89 adata szerint 89. E kettőt egybevetve $883^2 = 779\,689$, *megfelel* N-ként. – Viszont 947^2 kétjegyű végződése, mint 47^2-é is, 09, a próbát – a zérus miatt – fölösleges folytatni.