I. megoldás. **1.** Az ábrázolást előkészítő számítás azokra a pontokra a legkönnyebb, amelyekre $x=0$: az y tengely minden, az origótól különböző rácspontjában $\operatorname{tg}\varphi=1$, $\varphi=45^\circ$. Ugyanez adódik az x tengely rácspontjaira. Hasonlóan minden más, az origón átmenő e egyenes pontjaira $\operatorname{tg}\varphi$ értéke állandó, hiszen $x\neq 0$ esetén, ha e egyenlete $y=mx$, úgy

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\left(\frac{y}{x}\right)-1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\left(\frac{y}{x}\right)-1}=\frac{m^2-2m-1}{m^2+2m-1}. \tag{2}$$

A legkézenfekvőbb értékek,

$$\begin{gathered}m=1,\qquad 2,\ 1/2,\ -1,\ -2,\ -1/2 \text{ esetében}\\ \operatorname{tg}\varphi=-1,\ -1/7,\ -7,\ -1,\ -7,\ -1/7.\end{gathered}$$

Ezekből egyszerűsödést sejtünk a további számításban, ti. hogy (2)-ben m helyére $-\frac{1}{m}=-\frac{x}{y}$-t írva ($m\neq 0$), $\operatorname{tg}\varphi$-re ugyanazt az értéket kapjuk, mint m mellett, ha pedig $-m=-\frac{y}{x}$-et írunk, akkor a reciprokát. Az utóbbi (2)-ből közvetlenül látható, az első pedig úgy, ha a behelyettesítés után m^2-el bővítünk:

$$\frac{\left(-\frac{1}{m}\right)^2-2\left(-\frac{1}{m}\right)-1}{\left(-\frac{1}{m}\right)^2+2\left(-\frac{1}{m}\right)-1}=\frac{1+2m-m^2}{1-2m-m^2}=\operatorname{tg}\varphi.$$

E kettőből már adódik, hogy m helyére $\frac{1}{m}=-\left(-\frac{1}{m}\right)=\frac{x}{y}$ is az m-hez kapott érték reciprokát kapjuk. – Ezek alapján elég (2)-be m-ként 0 és 1 közti racionális értékeket helyettesíteni. A nevező így sohasem válik 0-vá, mert

$$m^2+2m-1=(m+1)^2-2=(m+1-\sqrt{2})(m+1+\sqrt{2})=0$$

csak $m=\frac{x}{y}=-1\pm\sqrt{2}$ mellett teljesül és e két érték egyike sem lehet két egész szám hányadosa, mert – mint ismeretes – a $\sqrt{2}$ szám nem egyenlő két egész szám hányadosával.

2. Az ábra a $-4\leqq x\leqq 10$ és $-3\leqq y\leqq 10$ tartománybeli rácspontok tűit mutatja. Összképükből kiemelkednek az $y=-x$ egyenes – a II. és IV. síknegyedek szögfelezője – rácspontjai fölé állított tűk, ezek mindegyike magának az egyenesnek egy szakaszát fedi. A további tűk pedig olyan körök egyes pontjaiban megrajzolt érintőknek látszanak, amely körök az előbbi egyenese az origóban érintik, és így a megfelelő középpontokat szemünk az I. és III. síknegyed f szögfelezőjén, az $y=x$ egyenletű egyenesen keresi. (A látni vélt érintkezés kidomborítása végett az origóba is rajzoltunk egy $\operatorname{tg}\varphi=-1$ állású rudacskát.)

3. Meglátásunk igazolására megmutatjuk, hogy ha $y_0\neq -x_0$, akkor minden $P(x_0,y_0)$ rácspontbeli tűhöz van olyan K pont az f egyenesen, hogy a K körüli, KP sugarú kör érinti a P-beli tűt (és persze az O-beli rudacskát is). Ez a fentiek szerint az $y=x$ egyenesen levő P rácspontokra abból adódik, hogy tűik párhuzamosak a rudacskával, tehát OP a mondott körnek átmérője. Minden más rácspontra – azaz $|x_0|\neq|y_0|$ esetén – elég azt bizonyítani, hogy a tűre P-ben állított n merőleges és a PO szakasz g felező merőlegese ugyanabban a pontban metszi f-et.

n egyenlete

$$y-y_0=-\frac{y_0^2+2x_0y_0-x_0^2}{y_0^2-2x_0y_0-x_0^2}\cdot(x-x_0),$$

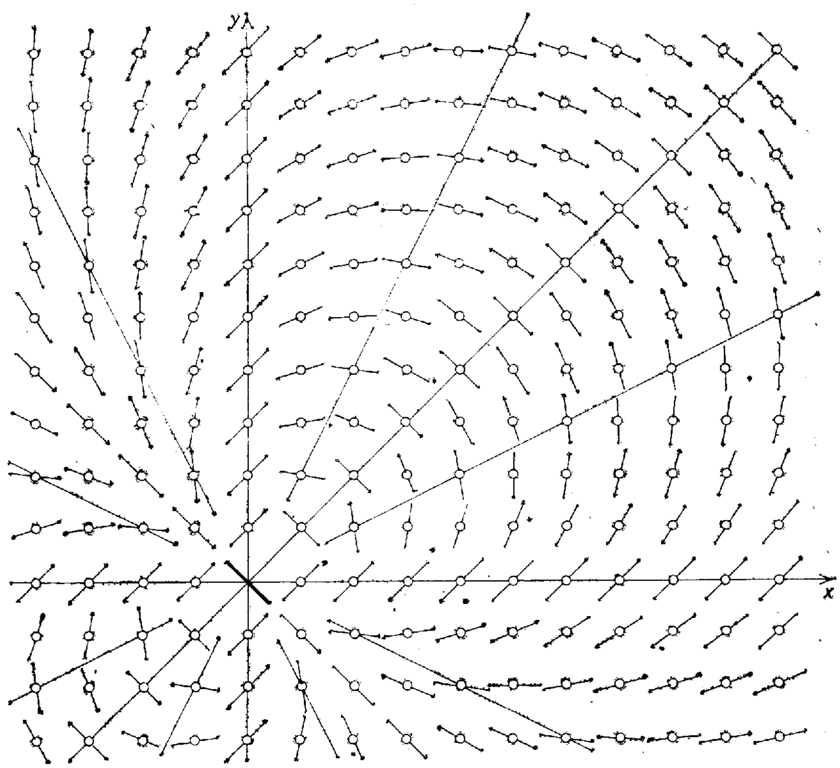
amiből az f-fel való K_1 metszéspont koordinátái:

$$x_1=y_1=\frac{(y_0-x_0)(x_0^2+y_0^2)}{2(y_0^2-x_0^2)}=\frac{x_0^2+y_0^2}{2(x_0+y_0)}.$$

A mondott g felező merőleges egyenlete pedig

$$x^2+y^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2,$$

és f-fel való K_2 metszéspontjának koordinátáira az előbbi x_1, y_1 értékek adódnak, tehát K_2, azonos K_1-gyel, az állításunkbeli K-val. Ezzel meglátásunkat igazoltuk.



4. Az ábrán látszó szimmetriák – ti. hogy f és az $y=-x$ egyenes szimmetriatengelyei, az origó pedig szimmetriaközéppontja az ábrának – az ábrázolást megkönnyítő észrevételeink következményei, ezekre azonban meglátásunk bizonyításában nem volt szükség. Nem kellett felhasználnunk, hogy x_0, y_0 egész számok, csak azt, hogy egyszerre nem vehetik fel a 0 értéket, és hogy az y/x hányados nem egyenlő $-1\pm\sqrt{2}$-vel. Ezért meglátásaink akkor is érvényesek, ha síknak minden, az origótól és az $y=(-1\pm\sqrt{2})\,x$ egyenes pontjaitól különböző pontjában elhelyeznénk egy tűt (1)-nek megfelelően (csak így a tűk sűrűsége miatt semmit sem látnánk).

Megjegyzés. Egy-egy látni vélt kör legalább 2 „tűs" ponton megy át, melyek egymás tükörképei f-re, és 3-on, ha átmegy egy f-beli tűs ponton is. De pl. az $(5;5)$ közepű kör $3+8=11$ tűn megy át az $50=(\pm5)^2+(\pm5)^2=(\pm7)^2+(\pm1)^2$ egyenlőség alapján.

II. megoldás. (a fenti megtátás igazolására). Azt fogjuk megmutatni, hogy a $P(x_0,y_0)$ ponton átmenő,

$$\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{y_0^2-2x_0y_0-x_0^2}{y_0^2+2x_0y_0-x_0^2} \tag{3}$$

meredekségű egyenes érinti azt a kört, amelyik

a) átmegy az origón és P-n, továbbá

b) középpontja az $y=x$ egyenletű egyenesen van, amennyiben a P pontra teljesülnek a következő feltételek:

1. P nincs rajta az $y=-x$ egyenletű egyenesen,

2. (3) nevezője nem 0, azaz P nincs rajta az

$$(4a)\qquad y=\left(\sqrt{2}-1\right)x \qquad\text{és}\qquad y=\left(-\sqrt{2}-1\right)x \qquad (4b)$$

egyenletű egyenesek egyikén sem.

Az $y=x$ egyenes tetszőleges (u,u) pontja $(u\neq0)$ körül rajzolt, az origón átmenő kör egyenlete

$$(x-u)^2+(y-u)^2=2u^2, \tag{5}$$

ahonnan rendezéssel x és y között az

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}=2u \tag{6}$$

összefüggést kapjuk. Ebből látszik, hogy a sík tetszőleges P pontjához egy és csakis egy *a)* és *b)* tulajdonságú kör található, ha P eleget tesz az 1. feltételnek, hiszen (6)-ba a P pont koordinátáit helyettesítve megkapjuk u értékét. Ha P a 2. feltételnek is eleget tesz, akkor P nem lehet a hozzá tartozó kör x tengellyel párhuzamos átmérőjén, hiszen ezen átmérővégpontok halmazának paraméteres egyenlete az u paraméter szerint:

$$x=u+u\sqrt{2},\quad y=u, \tag{7a}$$

illetve

(7b) $$x = u - u\sqrt{2}, \quad y = u,$$

és ($7a$) ekvivalens ($4a$)-val, ($7b$) pedig ($4b$)-vel.

Az x tengellyel párhuzamos átmérő az (5) egyenletű köröket két ívre vágja szét. Beláttuk, hogy P a rajta átmenő kör valamelyik ívének a belső pontja. Mindkét ív előállítható alkalmasan választott egy változós függvény képeként is: a felső ív

(8a) $$y(x) = u + \sqrt{u^2 + 2ux - x^2}$$

függvény képe, az alsó ív pedig az

(8b) $$y(x) = u - \sqrt{u^2 + 2ux - x^2}$$

függvényé. Mindkét függvény deriválható az értelmezési tartománya belsejében, és bármelyiket helyettesítjük is (6) bal oldalába, a kapott

(9) $$f(x) = \frac{x^2 + y^2(x)}{x + y(x)}$$

függvény értéke az x-től független

$$u = \frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0 + y_0}$$

konstans. Emiatt $f(x)$ deriváltja 0, ezt a deriváltat azonban (9) alapján az $y(x)$ függvény deriváltjával is kifejezhetjük:

(10) $$f'(x) = [x + y(x)]^{-2} \left\{[2x + 2y(x) \cdot y'(x)][x + y(x)] - \left[x^2 + y^2(x)\right] [1 + y'(x)]\right\} = 0.$$

Az $y(x)$ függvény deriváltjára tehát (10) alapján teljesül, hogy

(11) $$y'(x) = \frac{x^2 + y^2(x) - 2x\left[x + y(x)\right]}{2y(x)\left[x + y(x)\right] - \left[x^2 + y^2(x)\right]} = \frac{y^2(x) - 2xy(x) - x^2}{y^2(x) + 2xy(x) - x^2}.$$

Mivel az x_0 helyen $y(x_0) = y_0$, azért (11) szerint $y'(x_0)$ egyenlő (3) jobb oldalával, tehát a (3) meredekségű egyenes valóban érinti a P ponton átmenő *a)*, *b)* tulajdonságú kört.

Megjegyzés. Néhányan felismerték, hogy ha tg φ értelmezve volna minden olyan valós x, y számpárra, amelyre csak lehet, akkor a kérdést differenciálegyenlet megoldására lehetne visszavezetni – és nem bírtak ellenállni annak a kísértésnek, hogy valamilyen „nagy ágyú” alkalmazását mutassák be. Az ilyen dolgozatokat csak csökkent értékkel fogadhattuk el, mert szerzőik a felhasznált eljárás alkalmazhatóságának előfeltételeit nem vizsgálták és – a versenykiírással ellentétben – forrásaikra még csak nem is hivatkoztak. Ismételten hangsúlyozzuk, hogy az analízis legtöbb eljárása nem alkalmazható gépiesen a megfelelő feltételek ellenőrzése nélkül.