

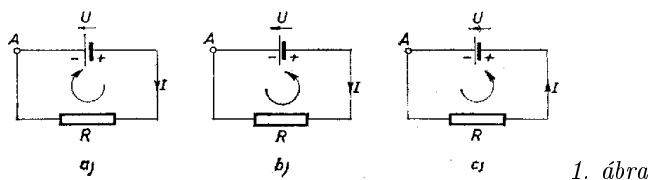
**Kérdés:** *Elektromos áramkörök számításával foglalkozó fizikai feladatmegoldásoknál többször találkoztam a Kirchoff-törvényekkel. Több fizikakönyvben utána néztem, és úgy látom, hogy azok nem egységesek, mintha különböző összefüggéseket neveznének a különböző könyvek Kirchoff-törvényeknek. Ebben a kérdésben nem tudok kiigazodni. Szeretném tudni, hogy pontosan mit is értünk az elektromos áramkörökre vonatkozó Kirchoff-törvényeken?* (Tóth György)

**Felelet:** A helyesen, de különböző matematikai alakban megfogalmazott I. és II. Kirchoff-törvény *fizikai tartalma* természetesen mindig ugyanaz. A fizikai mennyiségek definíciója, elsősorban pedig az előjelek megállapodástól függenek, ezért a Kirchoff-törvények különböző könyvekben matematikailag különböző alakúak lehetnek. Ismertetjük a törvények különböző lehetséges megfogalmazását, rámutatva a felmerülő előjelkérdésekre. Egyszerűség kedvéért korlátozzuk vizsgálatainkat egyenáramú körökre.

*Áramforrásnak* nevezzük az olyan berendezést, melynek segítségével elektromos vezetőkben folyamatosan (hosszabb ideig) elektromos áram tartható fenn. Áramforrások pl. a különböző telepek, akkumulátorok, generátorok stb. Ezek közös tulajdonsága, hogy két kivezetésük, „kapcsuk” van, amelyek között olyan potenciálkülönbség (feszültség) jelentkezik, amely lehetővé teszi, hogy a kapcsokra kötött ellenálláson (terhelésen) tartósan elektromos áram folyjék át.

Az áramforrásokra jellemző, hogy belsejükben, olyan fizikai hatásoknak kell fellépniük, melyek a pozitív kapocsról elektronokat „szívják” el és azokat a negatív kapocsra „nyomják”. Ez tehát olyan erőhatás, mely éppen ellentétes az elektromos töltések között fellépő (elektrosztatikus) erővel, mert a negatív töltést (elektronokat) a negatív kapocsra hajtja. Ennek az erőhatásnak eredete különböző lehet (kémiai: akkumulátorok, termikus: hőelemek, mechanikai: generátorok). Az áramforrást folyadékszivattyúhoz hasonlíthatjuk, amely pl. a vizet egyik végén szívja, másik végén nyomja. Így a szivattyú két végéhez csővezetékét kapcsolva a víz folyamatos körbeáramlása következik be. A szivattyú a csatlakozó csővezeték végén nyomáskülönbséget tart fenn. Ez biztosítja a csőben a víz folyamatos áramlását a fellépő (fékező) súrlódás ellenére is. A külső csővezetékben a víz a nagyobb nyomású helyről a kisebb nyomású felé áramlik, magában a szivattyúban viszont a kisebb nyomású helyről a magasabb nyomású hely felé. Ezt a szivattyúban az teszi lehetővé, hogy benne külső erők mechanikai munkát végeznek, a szivattyú kívülről energiát kap. Ez a kívülről kapott mechanikai energia alakul azután a külső csővezetékben hővé (esetleg pl. a turbinában újból mechanikai energiává). Teljesen hasonlóan az áramforrás a terhelés két végén biztosítja az áram tartós folyásához szükséges potenciálkülönbséget, kapocsfeszültséget. A terhelésen az elektromos áram a pozitív kapocsból a negatív kapocsba (technikai áramirány) folyik: energiát (Joule-féle hőt, esetleg mechanikai energiát a motorokban) szolgáltat. Az áramforrásban az áram a feszültséggel ellentétes irányba folyik, miközben energiát fogyaszt. Az áramforrás belsejében tehát más (pl. kémiai, mechanikai) energia tűnik el (alakul át elektromos energiává), és ez jelenik meg a fogyasztóban (terhelésen). Azt a kifejezést szoktuk használni, hogy az áramforrásnak (kémiai, termikus vagy mechanikai hatások következtében) *elektromotoros ereje* van. (Az erő szóhasználat félreértésre ad lehetőséget, nem mechanikai erőről van szó, ezt már az is mutatja, hogy az elektromotoros erő egysége ugyanúgy a volt, mint a feszültségé. A mechanikai hasonlatunknál, a szivattyúnál az ennek megfelelő fizikai mennyiség: a nyomáskülönbség sem erő.) Az elektromotoros erő biztosítja zárt áramkörben az áram folytonos folyását, az áramkör megszakításakor pedig ez a terheletlen „üres” kapcsokon potenciálkülönbséget, feszültséget tart fenn.

Az elektromotoros erőt a terheletlen kapcsokon jelentkező ún. üresjárási kapocsfeszültséggel mérhetjük, megegyezés szerint azonban az üresjárási kapocsfeszültséggel *ellentétes előjelűnek választjuk*. Az elektromotoros erő tehát az üresjárási kapocsfeszültség  $(-1)$ -szerese. Az előzőekben mondottak szerint az ellenkező előjelezés érthető, az elektromotoros erő az elektronokat a negatív sarokra hajtja, tehát ellentétes a feszültséggel. A Kirchoff-féle törvények különbözőek lesznek annak megfelelően, hogy az elektromotoros erőt vagy az üresjárási kapocsfeszültséget használjuk-e bennük mint fizikai fogalmat.



1. ábra

Legelőször vizsgáljuk a legegyszerűbb esetet, az ideális (belső ellenállás nélküli)  $U$  kapocsfeszültségű,  $R$  ellenállással terhelt telepet. Az 1. ábrán ennek feszültségviszonyait tüntettük fel.

Az 1a ábra szerint az  $A$  pontból kiindulva a bejelölt körüljárási irányban haladva, az  $A$  pontba visszaérkezve a feszültségesések összege nulla. Tehát

$$(1a) \quad -U + IR = 0.$$

Az első tag előjele negatív, mert a telepen keresztülhaladva a feszültség (a körüljárási irányban) nem esik, hanem emelkedik. Lényeges, hogy a telepen az  $U$  feszültséget helyesen (a pozitív sarokból a negatív sarok felé mutató nyíllal) jelöljük; a körüljárási irány és az  $I$  áramerősség pozitív iránya azonban már önkényes lehet. Pl. az 1b ábra szerint

$$(1b) \quad -IR + U = 0.$$

Most a körüljárási irányban haladva az ellenálláson emelkedik a feszültség, ezért itt  $IR$  előjele negatív.

1a és 1b azonossága nyilvánvaló (az egyik egyenlet a másik  $(-1)$ -szerese). Az 1c ábra szerint viszont

$$(1c) \quad IR + U = 0.$$

Most már az egyenlet nem azonos az előzőekkel, hanem ebből

$$I = -\frac{U}{R},$$

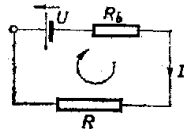
vagyis  $I$ -re negatív eredményt kapunk. Fizikailag azonban a kapott eredmény megint helyes, a negatív eredmény csak azt jelenti, hogy a valódi áram az ábrán önkényesen felvett áramiránnyal ellentétes irányban folyik.

Ennél az egyszerű példánál az 1a egyenlet használata tűnik természetes-nek. Rámutatunk azonban a másik két egyenlet használhatóságára is. Bonyolult áramköröknél ugyanis sokszor a valódi áramirányokat előre nem tudjuk, ellentétben a telepek feszültségével (ezeken a  $+$ , ill.  $-$  sarkok meg vannak jelölve, ismertek). Önkényesen felvéve az áramirányokat, helyes eredményt kaphatunk, tudva azt, hogy az áramerősségre kapott negatív érték ellentétes irányú valódi áramot jelent.

Végül az (1a) egyenletet így is átalakíthatjuk:

$$(2) \quad -(-U) = IR; \quad U = IR.$$

Ezt az egyenletet fizikailag így értelmezhetjük: a nyíl irányában körbejárva az elektromotoros erő (negatív kapcsolcseszültség, akkor adódik pozitívnak, ha  $U$  és a körbejárás iránya ellentétes) egyenlő a terhelésen fellépő feszültségessel.  $U$ -t az egyenlet egyik oldaláról a másikra átvive előjelet vált, vagyis kapcsolcseszültségből elektromotoros erő lesz.



2. ábra

A (2) alakú egyenlet alkalmazásának célszerűsége azon alapszik, hogy az áramforrások többségénél az elektromotoros erő nem függ az  $I$  áramerősségtől. Ezért a (2) egyenlet bal oldala a terheléstől függetlenül állandó. Ez azonban nem azt jelenti, hogy a kapcsolcseszültség állandó. Az elektromotoros erőt létrehozó energiaforrás szolgáltatja elektromos energiának egy része már magában az áramforrásban átalakul (többnyire hővé), elvész a külső terhelés számára. Ilyen veszteséget okoz pl. a generátorok tekercseiben keletkező Joule-féle hő. Ezért a valódi áramforrás az előző példában felhozott „ideális” áramforrással és egy vele sorbakapcsolt belső ellenállással ( $R_b$ ) jellemezhető. (L. 2. ábra.) Ekkor a feszültségekre a

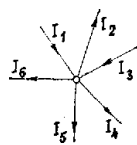
$$(3) \quad -U + R_b I + RI = 0$$

egyenletet írhatjuk fel. Vagy az elektromotoros erő fogalmát felhasználva:

$$(4) \quad U = R_b I + RI.$$

Tehát az elektromotoros erő egyenlő a (belső és külső) ellenállásokon jelentkező feszültségesek összegével.

Több áramforrás és több terhelés különféle összekapcsolásánál az áramforrások elektromotoros erejét, a belső és külső ellenállásokat ismerve, a Kirchoff-törvények mindig elegendő egyenletet adnak az időben állandó (stacionáris) áramerősségek meghatározására.



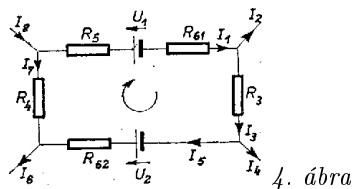
3. ábra

I. *Kirchoff első törvénye* vagy a csomóponti törvény az áramelágazási pontokra vonatkozik és így szól: Minden csomópontban az egyes ágakból odaérkező áramok erősségének összege egyenlő a kifolyó áramok erősségének összegével. Tehát pl. a 3. ábra szerint:

$$(5) \quad I_1 + I_3 = I_2 + I_4 + I_5 + I_b.$$

II. *Kirchoff második törvénye* vagy a huroktörvény szerint a tetszőlegesen kiválasztott hurok mentén a hurokban levő elektromotoros erők algebrai (előjeles) összege egyenlő az ellenállásokon jelentkező feszültségesek algebrai (előjeles) összegével. Tehát pl. a 4. ábra szerint

$$(6) \quad U_1 - U_2 = R_{b1} I_1 + R_3 I_3 + R_{b2} I_5 - R_4 I_7 + R_5 I_1.$$



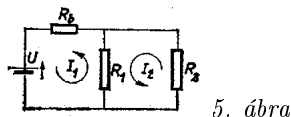
4. ábra

Az alkalmazandó előjelek az előzőek szerint már érthetőek. Pl. a negyedik tag a jobb oldalon negatív, mert  $I_7$  iránya a körüljárás irányával ellentétes. A telepeken  $U$ -k nyilai adottak,  $I$ -k és a körüljárás iránya önkényes. Negatív áramerősség az eredményben a felvett irányokkal ellentétes irányú áramot jelent.

A második Kirchhoff-törvény természetesen így is megfogalmazható: a hurkon körüljárva a feszültségesések összege nulla. Ilyenkor nemcsak a (külső és belső) ellenállásokon fellépő feszültségesések összegezendők, hanem a telepek feszültségei is. Pl. a 4. ábrának megfelelően most ez írható fel:

$$(7) \quad I_3 R_3 + U_2 + I_5 R_{b2} - I_7 R_4 + I_1 R_5 - U_1 + I_1 R_{b1} = 0.$$

Bonyolult kapcsolásoknál igen sok egyenletet kell felállítanunk, de a két Kirchhoff-törvény mindig elegendő független egyenletet szolgáltat a feladat megoldásához. Gyakorlatban újabban egyszerűbben szoktak eljárni. A hurkokban a felvett körüljárási irányban folyó ún. hurokáramokkal számolnak. Valamely ágban folyó áram mindazoknak a hurokáramoknak az algebrai összege, amelyek a vizsgált ágon keresztülfolyanak. Ilyen módon a Kirchhoff első törvénye már eleve kielégítődik és csak a második törvényt kell alkalmaznunk. Lássunk erre egy egyszerű példát (5. ábra).



5. ábra

Az  $I_1$  hurokra

$$(8) \quad U = (I_1 - I_2)R_1 + R_b I_1,$$

az  $I_2$  hurokra

$$(9) \quad 0 = (I_2 - I_1)R_1 + R_2 I_2.$$

E két egyenletből:

$$(10) \quad I_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_b + R_1 R_b} U,$$

$$(11) \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_b + R_1 R_b} U.$$

Természetesen az  $R_1$  ellenálláson átfolyó áram erőssége

$$(12) \quad I_1 - I_2 = \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_b + R_2 R_b} U.$$

Ennek alapján reméljük, nem lesz nehéz az elektromos áramkörökre vonatkozó feladatok megoldása.

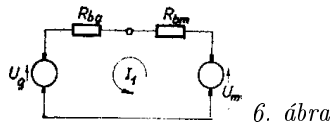
Talán csak még egy kérdést vehetünk fel. Mit jelent az, ha a Kirchhoff-törvények alapján valamelyik áramforráson annak elektromotoros erejével ellentétes (feszültségével megegyező) irányban folyó áramerősséget kapunk? Ez azt jelenti, hogy az áramforrás nem energiát szolgáltat, hanem energiát fogyaszt. Tehát pl. az akkumulátorban kémiai energia jelenik meg, az akkumulátor nem kisül, hanem töltődik. A generátor mechanikai energiát nem fogyaszt, hanem szolgáltat, vagyis ez az elektromos gép nem generátorként, hanem motorként dolgozik. Nézzük pl. a 6. ábrát, ahol egy generátor és egy motor kapcsolási rajzát láthatjuk. ( $R_{bg}$ : a generátor belső ellenállása,  $R_{bm}$ : a motor belső ellenállása, a vezeték ellenállását elhanyagoltuk.)

A Kirchhoff-törvények szerint:

$$(13) \quad U_g - U_m = R_{bg} I_1 + R_{bm} I_1,$$

tehát

$$(14) \quad I_1 = \frac{U_g - U_m}{R_{bg} + R_{bm}}.$$



A forgó motorban a generátoréval ellentétes irányú elektromotoros erő lép fel. Ezért ezt ellenelektromotoros erőnek is nevezik. Miként a (14) egyenletből látható, az ellenelektromotoros erő lecsökkenti a körben folyó áramot. Vagyis pl. a (13) egyenletet átalakítva

$$(15) \quad U_g = U_m + R_{bg}I_1 + R_{bm}I_1.$$

A jobb oldali  $U_m$  pozitív, úgy is tekinthető, mintha az  $R_{bg}$  és  $R_{bm}$  mellett a körben újabb nagy „ellenállás” jelenne meg. Ezen az „ellenálláson” átfolyó áram azonban nem hőt fejleszt, hanem mechanikai munkát végez.  $I_1$ -gyel végigszorozva:

$$(16) \quad U_g I_1 = U_m I_1 + (R_{bg} + R_{bm}) I_1^2.$$

A generátor által fogyasztott mechanikai teljesítmény egyenlő a motor által leadott mechanikai teljesítmény és a hővesztések összegével. Álló motornál  $U_m = 0$ , ilyenkor (14) szerint az áramerősség sokszorosa az üzemi áramerősségnek. A motor lehet úgy méretezve, hogy az indítás rövid idejéig ezt a többletáramot kibírja, máskor ún. indító ellenállással kell a kezdeti áramot korlátozni és csak a motor forgásba jövétele után szabad ezt fokozatosan kikapcsolni.

**Bodó Zaláné**