A vektorok mibenléte és a velük végzett legegyszerűbb műveletek (összeadás, kivonás, összetevőkre bontás) ismeretesek a középiskolai tanulmányokból. Vektorokra azonban nemcsak ezek a műveletek értelmezhetők, hanem két vagy több vektor szorzása is. A következőkben bemutatott néhány egyszerű példa azt szeretné illusztrálni, mennyire megkönnyítik az ilyen műveletek a fizikai és geometriai összefüggések, törvények felírását és az azokkal való számolást.

Természetesen egy új műveletet értelmezhetünk teljesen önkényesen, de általában vannak bizonyos célszerűségi szempontok vagy megszorítások. (Például a negatív és tört kitevőjű hatványt úgy definiáljuk, hogy a hatványozás pozitív egész kitevőkre vonatkozó ismert azonosságai továbbra is érvényben maradjanak.) Mivel a vektorokat két adat (nagyság és irány) jellemzi, még a célszerűségi szempontok figyelembevételével is a szorzást többféleképpen értelmezzük.

Vektorok szorzása skaláris mennyiséggel

Legyen m tetszőleges valós szám. Az $m\mathbf{a}$ vektoron azt a vektort értjük melynek iránya $\mathbf{a}$-éval egyező, illetőleg $m < 0$ esetén vele ellentétes, nagysága pedig az $\mathbf{a}$-énak $|m|$-szerese. Ez természetszerűleg adódik a szorzásnak mint ismételt összeadásnak az értelmezéséből.

Könnyen belátható, hogy a szorzás e fajtája asszociatív és disztributív a következő értelemben:

$$(mn)\mathbf{a} = m(n\mathbf{a}); \quad (m+n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a},$$
$$m(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = m(\mathbf{b}+\mathbf{a}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b}.$$

Vektorok skaláris szorzata

$\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatán az $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi$ skaláris mennyiséget értjük, melynél φ a két vektor által bezárt (180°-nál kisebb) szög. Jele:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{ab} \quad \text{vagy} \quad (\mathbf{ab}).$$

Nyilván érvényes a kommutativitás és disztributivitás:

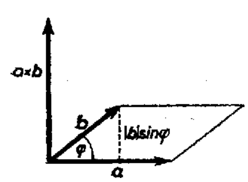
$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}; \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}.$$

Az asszociatív törvény nem érvényes, hiszen általában $(\mathbf{ab})\cdot\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{bc})$. (Itt kétféle szorzás szerepel!) Ennek a szorzásnak az az érdekessége, hogy a szorzat akkor is lehet nulla, ha egyik tényező sem az, hanem egymásra merőlegesek. Két vektor merőleges voltát tehát így fejezhetjük ki: $\mathbf{ab} = 0$. (A nullvektort bármely vektorra merőlegesnek tekintjük.) Megjegyezhetjük még, hogy $\mathbf{a}^2 = \mathbf{aa} = |\mathbf{a}|^2$. Továbbá, hogy ha $|\mathbf{b}| = 1$ (egységvektor), akkor $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot \cos\varphi$, ami nyilván az $\mathbf{a}$ vektornak a $\mathbf{b}$ irányába eső vetülete.

Vektorok vektoriális szorzata

Két vektor vektoriális szorzatán $\big(\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vagy $[\mathbf{ab}]\big)$ azt a vektort értjük, melynek nagysága $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$ (φ a két vektor által bezárt, 180°-nál kisebb szög), iránya pedig merőleges a két tényezővektorra, továbbá $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ sorrend szerint úgy állnak, mint a jobb kéz egymásra merőlegesen állított hüvelyk-, mutató- és középső ujja. (Jobbsodrású rendszer.)

A meghatározás mutatja, hogy tulajdonképpen irányított területről van szó, mert a vektori szorzat nagysága a két tényező által kifeszített paralelogramma területe (1. ábra).



1. ábra

Itt is igaz, hogy a szorzat lehet nulla, ha a két tényező nem is az; ha ti. a két vektor párhuzamos egymással. Ezért a párhuzamosságot így is kifejezhetjük: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$. (A nullvektort bármely vektorral párhuzamosnak vesszük.) A felcserélési törvény nem érvényes, mert a sinus-függvény páratlan voltából kifolyólag

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

A csoportosítási törvény sem érvényes, de a disztributivitás igen:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

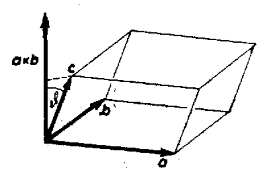
Ennek bizonyítása, ha a három vektor egy síkban van, egyszerű, de általános esetben sem nehéz, inkább hosszadalmas, s ezért mellőzzük.

Vegyes szorzat

Természetesen az előbbi szorzatfajtákat különféleképpen lehet kombinálni. Így nyerjük pl. az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$, ún. vegyes szorzatot, mely könnyen beláthatólag az ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokból alkotott paralelepipedon előjeles köbtartalmával egyenlő, mivel $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ az alapterület és $|\mathbf{c}| \cdot \cos\vartheta$ a magasság (2. ábra). Erre érvényes az alábbi azonosság:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}),$$

így ezt röviden $\mathbf{abc}$-vel jelöljük.



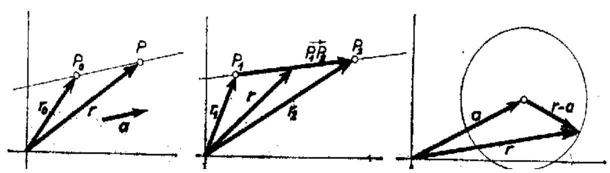
2. ábra

Gyakorlásul ellenőrizhetjük a következő összefüggések helyességét:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = 0 \quad \text{és} \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2.$$

Alkalmazások

Az előbb ismertetett műveletek a geometriában (főként az analitikus geometriában) igen leegyszerűsítik az összefüggések felírását és nagyon szemléletesek. Pl. a cosinus-tétel így írható: $(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \pm 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$.



3., 4. és 5. ábra

Egy P_0 ponton átmenő és egy $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos egyenes egyenlete, ha $\mathbf{r}_0$ a P_0 helyvektora és $\mathbf{r}$ a változó vektor: $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a} = 0$ vagy $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = m\mathbf{a}$ (3. ábra). Két ponton átmenő egyenes egyenlete:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \overrightarrow{P_1P_2} = 0 \quad \text{vagy} \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = m\overrightarrow{P_1P_2} \quad \text{(4. ábra)}.$$

A kör egyenlete:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{a})^2 = R^2 \quad \text{(5. ábra)}.$$

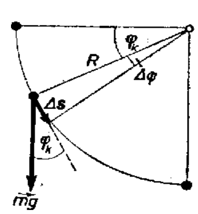
Számunkra azonban fontosabbak a fizikai alkalmazások. A legfontosabbak közül is csak néhányat említünk.

Munka. Ismeretes a $\vec{P}$ erő által $\mathbf{s}$ elmozdulás alatt végzett munka meghatározása, mely vektori alakban így írható:

$$L = \vec{P}\mathbf{s} = P \cdot |\mathbf{s}| \cos\varphi.$$

Valóban ez a szorzat az útnak és az út irányába eső erőkomponensnek a szorzata.

Természetesen görbe vonalú mozgás esetén a megtett utat egyenesnek tekinthető, igen kicsi $\Delta\mathbf{s}$ szakaszokra bontjuk és így képezzük az elemi munkát: $\Delta L = \vec{P} \cdot \Delta\mathbf{s}$, s ezeket összegezzük az egész útra: $L = \Sigma\vec{P} \cdot \Delta\mathbf{s}$. Általában ez csak az integrálszámítás segítségével végezhető el. Egyszerűbb esetben azonban nélküle is célhoz lehet jutni. Vegyük például egy matematikai inga esetét, amikor keressük, mennyi munkát végez a nehézségi erő, míg az m tömeget vízszintes helyzetből a legmélyebb helyzetbe hozza.



6. ábra

Osszuk fel a negyedkörívet n darab Δs hosszúságú ívre (6. ábra). Legyen egy ilyen ívdarabhoz tartozó központi szög $\Delta\varphi = \dfrac{\Delta s}{R}$. A k-adik osztóponthoz tartozó szögelmozdulás $\varphi_k = k\Delta\varphi$. Így a k-adik Δs-hez tartozó elemi munka $\Delta L = mg \cdot \Delta s \cdot \cos\varphi_k$. A teljes munka:

$$L = mg\ R \sum_{k=1}^{n} \Delta\varphi \cdot \cos\varphi_k.$$

Ezt az összeget kell meghatározni. Mivel $\Delta\varphi$ nagyon kicsi, azért $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$ (relatíve is kis hibát követünk el), $\cos\Delta\varphi \approx 1$, és így

$$\Delta\varphi \cdot \cos\varphi_k \approx \sin\Delta\varphi \cdot \cos\varphi_k + \cos\Delta\varphi \cdot \sin\varphi_k - \\ - \cos\Delta\varphi \sin\varphi_k = \sin(k+1)\Delta\varphi - \sin k\Delta\varphi.$$

Összegezve

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta\varphi \cdot \cos\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \left[\sin(k+1)\Delta\varphi - \sin k\Delta\varphi\right].$$

A jobb oldal

$$\sin 2\Delta\varphi + \ldots + \sin n\Delta\varphi + \sin(n+1)\Delta\varphi - \sin\Delta\varphi - \sin 2\Delta\varphi - \ldots - \\ - \sin n\Delta\varphi = \sin(n+1)\Delta\varphi - \sin\Delta\varphi \approx \sin\frac{\pi}{2}.$$

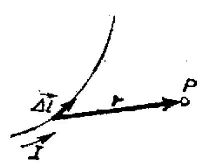
Ha $\Delta\varphi$ elég kicsi, akkor tehát $\sum\limits_{k-1}^{n} \Delta\varphi \cdot \cos\varphi_k = 1$, vagyis ha n elég nagy, akkor

$$L = mg\ R,$$

amint várható is volt az energiamegmaradás törvényéből.

A vektoriális szorzás sokszor azáltal is *megkönnyíti a törvények felírását,* hogy nem kell valamely vektor irányát külön megadni. Vegyük példaként a *Biot – Savart-törvényt,* melynek ismert alakja (ld. KML 1966. 4. szám)

$$\Delta H = \frac{1}{4\pi} \frac{I \cdot \Delta l \cdot \sin\varphi}{r^2}.$$



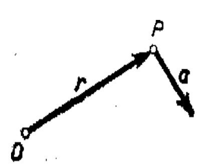
7. ábra

Ha figyelembe vesszük a térerősség irányát, láthatjuk (7. ábra), hogy a törvény ilyen alakban egyszerűbben írható

$$\Delta\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{\Delta\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Az ebben az alakban felírt törvény nemcsak a nagyságot, de az irányt is közvetlenül megadja.

Egy másik fontos alkalmazási terület a *nyomatékok (momentumok)* vektori alakban való értelmezése és használata.



8. ábra

Általában a tér P pontjában adott a vektornak a tér O pontjára vonatkozó nyomatékán az $m = \mathbf{r} \times \mathbf{a}$ vektoriális szorzatot értjük, ahol $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ (8. ábra).

Az $\mathbf{a}$ vektor különféle fizikai mennyiség lehet. Így beszélünk a sebesség, gyorsulás, erő, impulzus nyomatékáról.

Legyen például $\mathbf{a}$ a sebesség: $\mathbf{v}$, ekkor

$$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

$\mathbf{v}$-nek az O pontra vonatkozó (9. ábra) nyomatéka.

9. ábra

A Δt idő alatt történt elmozdulás vektora közelítőleg $(\Delta t)\,\mathbf{v}$,

$$\mathbf{r} \times (\Delta t) \cdot \mathbf{v} = \Delta t \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

pedig nagyságra a Δt idő alatt súrolt terület kétszeresét adja közelítőleg (háromszög területének kétszerese). Ezért

$$\mathbf{m} = \Delta t(\mathbf{r} \times \mathbf{v})/\Delta t = \mathbf{r} \times \mathbf{v},$$

a sebesség momentumának nagysága a területi sebesség kétszerese.

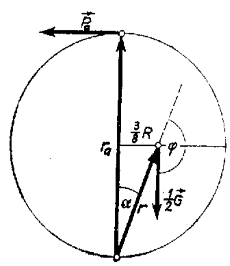
Centrális mozgásoknál, vagyis ahol az erő s ezért a gyorsulás is a mozgás centruma felé mutat, s így az erre merőleges komponens nulla (bolygók mozgása), belátható, hogy a sebesség momentumának nagysága s így a területi sebesség is állandó. Ez pedig Kepler II. törvénye, mely szerint a rádiuszvektor által egyenlő időközökben súrolt területek nagysága egyenlő.

A legfontosabb eset, ha $\mathbf{a}$ az erővektort jelenti, mert ekkor $|\mathbf{m}| = |\vec{P}| \cdot |\mathbf{r}| \sin\varphi$-ben $|\mathbf{r}|\sin\varphi$ az erő karja és így $\mathbf{m}$ tulajdonképpen a forgatónyomatékot adja. Szükség van az irányra is, hiszen a forgatónyomatéknak iránya is van, amit a vektori alak ki is fejez.

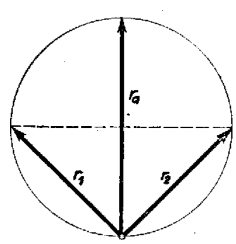
A forgatónyomaték vektori alakjával való számolás egyszerűségét mutatja a KML 582. feladatára adható következő megoldás. Legyen $\mathbf{r}$ az alátámasztási ponttól a félgömb súlypontjához vont vektor. Ekkor a súlyerő forgatónyomatéka $\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \overrightarrow{1/2\ G}$. Az *a)* esetben a fonál feszítőerejének forgatónyomatéka az alátámasztási pontra (10. ábra)

$$\mathbf{m_a} = \mathbf{r_a} \times \overrightarrow{P_\mathbf{a}}.$$

Mivel $\mathbf{m}$ és $\mathbf{m_a}$ ellentétes irányú, csak akkor lehetséges egyensúly, ha $\mathbf{m_a} = \mathbf{m}$.



10. ábra



11. ábra

A *b)* esetben $\vec{P}_\mathrm{b}$ vektor két pontban hat (11. ábra). Ekkor az összes forgatónyomaték

$$\mathbf{m_b} = \mathbf{r_1} \times \vec{P}_\mathrm{b} + \mathbf{r_2} \times \vec{P}_\mathrm{b} = (\mathbf{r_1} + \mathbf{r_2}) \times \vec{P}_\mathrm{b} = \mathbf{r_a} \times \vec{P}_\mathrm{b}.$$

Az egyensúly feltétele most is $\mathbf{m_b} = \mathbf{m}$, vagyis

$$\mathbf{r_a} \times \vec{P}_\mathrm{a} = \mathbf{r_a} \times \vec{P}_\mathrm{b} = \mathbf{r} \times \overrightarrow{1/2\,G}.$$

Ebből következik, hogy

$$\vec{P}_\mathrm{a} = \vec{P}_\mathrm{b},$$

azaz a kétfajta feszítőerő egyenlő és egyirányú. Nagysága könnyen kiszámítható, hiszen $|\mathbf{r}_a \mathbf{r}_a \mathbf{r}_{a\mathbf{r}_a}| = 2R$ **és** $\sin\varphi = \sin\alpha \frac{3/8R}{|\mathbf{r}|}$**. Így** $\mathbf{2RP_a} = 1/2\ G\ \cdot$

Az első tag a test transzlációs mozgási energiája:

$$E_t = 1/2M\mathbf{v}_0^2.$$

A második tag így írható: $\mathbf{v}_0(\vec{\omega} \times \sum_i m_i\mathbf{r}_i)$.

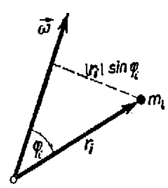
$\sum_i m_i\mathbf{r}_i$ azonban a tömegközéppont (súlypont) fogalmából kifolyólag helyettesíthető az $M\mathbf{r}_0$ mennyiséggel, ahol $\mathbf{r}_0$ a tömegközéppont rádiuszvektora a vonatkozási ponttól.[1] Tehát

$$E_{\text{kin}} = 1/2M\mathbf{v}_0^2 + \mathbf{v}_0(\vec{\omega} + M\mathbf{r}_0) + 1/2\sum_i m_i(\vec{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2.$$

Ha a vonatkoztatási pont a tömegközéppont, mely mindig lehetséges, akkor $\mathbf{r}_0 = 0$, s így a középső tag kiesik, vagyis ez esetben $E_{\text{kin}} = 1/2M\mathbf{v}_0^2 + 1/2\sum_i m_i(\vec{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2$.

Ha a test egyik pontja fix, vagyis csak forgómozgás van, akkor ezt választjuk vonatkoztatási pontnak, s így $\mathbf{v}_0 = 0$ miatt az első két tag eltűnik, függetlenül $\mathbf{r}_0$ értékétől, és marad

$$E_{\mathbf{f}} = 1/2\sum_i m_i(\vec{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 = 1/2\ \omega^2 \sum_i m_i\mathbf{r}_i^2 \sin^2\varphi_i.$$



13. ábra

Mivel $\sum_i m_i\mathbf{r}_i^2 \sin^2\varphi_i$ az $\vec{\omega}$ forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték (13. ábra), azért tiszta forgás esetén a mozgási energia

$$E_f = 1/2\ I\omega^2.$$

Általánosan egy merev test kinetikus energiája tehát

$$E_{\text{kin}} = 1/2\ M\mathbf{v}_0^2 + 1/2\ I\omega^2,$$

amint közismert.

Dózsa Márton

[1] (L. Bodó Zalán cikkét: KML XXII. k. 33. lapon)