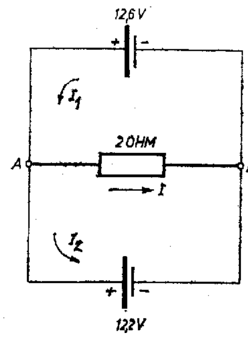
Az I. forduló feladatai

1. *Két akkumulátor áll rendelkezésünkre, amelyeknek elektromotoros ereje és belső ellenállása a következő:* $E_1 =$ 12,6 volt, $R_1 = 0{,}05$ ohm, $E_2 = 12{,}2$ volt, $R_2 = 0{,}5$ ohm. *Mi történik, ha a két áramforrást párhuzamosan kapcsoljuk és* $R_k = 2$ ohm *ellenállással zárt áramkört létesítünk?*



1. ábra

Megoldás. Különböző elektromotoros erejű áramforrásokat párhuzamosan kapcsolva a nagyobb elektromotoros erejű tölti a kisebbet. AB pontok között egy bizonyos U feszültségkülönbség jön létre (1. ábra). Az első elemből kijövő I_1 áram szétoszlik a második elemet töltő I_2 áramra és a 2 ohmos ellenálláson átfolyó I áramra:

$$I_1 = I_2 + I.$$

Az első elem elektromotoros erejének és U kapocsfeszültségének különbsége a belső ellenállásra jutó feszültségesést adja:

$$12{,}6 \text{ V} - U = 0{,}05\ \Omega\, I_1.$$

Hasonlóan a második elemnél:

$$U - 12{,}2 \text{ V} = 0{,}5\ \Omega\, I_2.$$

Továbbá felírható Ohm törvénye a külső ellenállásra:

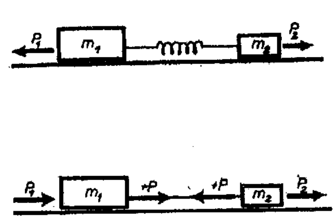
$$U = 2I\ \Omega = 2\ \Omega(I_1 - I_2).$$

Az utolsó három egyenletből álló rendszert megoldjuk, legegyszerűbben úgy, hogy az első kettőből kifejezett I_1-et és I_2-t az elsőbe helyettesítjük. Az eredmény:

$$U = 12\frac{64}{225}\text{ V} = 12{,}284 \text{ volt},$$

$$I_1 = 6\frac{70}{225}\text{ A} = 6{,}312 \text{ amper}, \qquad I_2 = \frac{38}{225}\text{ A} = 0{,}169 \text{ amper}.$$

2. *Az ábrán látható rendszer egyenletesen gyorsulva mozog. Adatok:* $m_1 = 10$ kg, $P_1 = 2$ kp, $m_2 = 2$ kg, $P_2 = 1$ kp. *Mekkora erőt jelez a dinamométer a) ebben az elrendezésben? b) ha a* P_1 *és* P_2 *szerepet cserél, c) ha* $m_1 = m_2 = 6$ kg*? Hogyan alakul az eredmény az a) és b) esetben, ha* m_2 *az* m_1*-hez képest elhanyagolható, pl.* $m_2 = 10$ gramm*? A súrlódástól eltekintünk és a dinamométer tömegét elhanyagoljuk.*



2. ábra

Megoldás. Foglalkozzunk általánosságban a problémával. A tömegek közös gyorsulása, legyen a, amely akkor pozitív, ha vektornyila jobbfelé mutat. P_1 és P_2 erők mindegyike akkor legyen pozitív, ha jobbfelé mutat (2. ábra). A fonálban működő P erőt akkor nevezzük pozitívnak, ha a fonál nyújtásra van igénybe véve, vagyis rugalmas ereje befelé húzza össze a tömegeket; negatív P esetében az összekötő fonalat pálcával kell helyettesíteni.

Az egész rendszer együttes tömege $m_1 + m_2$, a rá ható teljes erő $P_1 + P_2$, tehát Newton II. törvénye szerint a létrejövő közös gyorsulás:

$$a = \frac{P_1 + P_2}{m_1 + m_2}.$$

Ez a gyorsulás adódik Newton II. törvényéből akkor is, ha külön-külön írjuk fel az egyes tömegekre:

$$\frac{P_1+P}{m_1}=\frac{P_1+P_2}{m_1+m_2},$$
$$\frac{P_2-P}{m_2}=\frac{P_1+P_2}{m_1+m_2}.$$

Ezen egyenletek bármelyikéből kapjuk a fonálerőre:

$$P=\frac{m_1P_2-m_2P_1}{m_1+m_2}.$$

Táblázatunk különböző adatok esetében tünteti fel a fonálerőt és a keletkező gyorsulást:

m_1	m_2	P_1	P_2	P	a
kg	kg	kp	kp	kp	
10	2	-2	$+1$	$+7/6$	$-g/12$
10	2	$+1$	-2	$-11/6$	$-g/12$
10	2	-1	$+2$	$+11/6$	$+g/12$
6	6	-2	$+1$	$+1{,}5$	$-g/12$
10	0	-2	$+1$	$+1$	$-g/10$

Közöttük feleletet találunk a feladat kérdéseire. Ha valamelyik tömeg nulla, akkor a fonálerő egyenlő lesz az ezen az oldalon működő külső erővel. A fonálerő eltűnésének feltételét is megtudjuk P képletéből: $P_1:P_2=m_1:m_2$, vagyis mindegyik külső erő a maga tömegét gyorsítja; ekkor az erők csak egyirányúak lehetnek.

Ha egy merev testet több külső erő gyorsít, akkor az egész merev test gyorsulását a külső erők eredőjéből és az egész tömegből könnyen megkapjuk. Közben azonban a merev testben belső erők keletkeznek. Ezekre világít rá ez a feladat.

3. *Acélgolyóra* 20 °C*-os petróleumban* 21,45*,* 100 °C*-os petróleumban* 20 *pond felhajtóerő hat. Mekkora e mérés alapján a petróleum köbös hőkiterjedési együtthatója, ha az acél lineáris hőkiterjedési együtthatója* $1{,}2\cdot10^{-5}$ 1/°C*?*

Megoldás. Az acél köbös hőkiterjedési együtthatója $3{,}6\cdot10^{-5}$. Jelentse az acélgolyó 0 °C-on levő térfogatát V_a, akkor az acélgolyó térfogata 20°-on $V_a(1+3{,}6\cdot10^{-5}\cdot20)$, 100°-on $V_a(1+3{,}6\cdot10^{-5}\cdot100)$. Jelentse a petróleum 0°-os sűrűségét d, köbös hőkiterjedési együtthatóját β, akkor a petróleum sűrűsége 20°-on $d/(1+\beta\cdot20)$, 100°-on $d/(1+\beta\cdot100)$. A felhajtóerőt a golyó térfogatának és a folyadék sűrűségének (és g-nek) a szorzata adja meg;

20°-on:

$$\frac{V_a(1+3{,}6\cdot10^{-5}\cdot20)dg}{1+\beta\cdot20}=21{,}45,$$

100°-on:

$$\frac{V_a(1+3{,}6\cdot10^{-5}\cdot100)dg}{1+\beta\cdot100}=20.$$

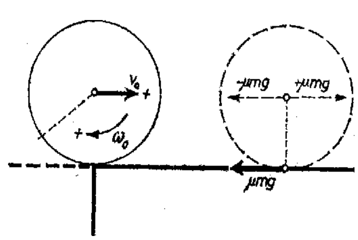
E kettő osztásával:

$$\frac{(1+3{,}6\cdot10^{-5}\cdot20)(1+\beta\cdot100)}{(1+3{,}6\cdot10^{-5}\cdot100)(1+\beta\cdot20)}=\frac{21{,}45}{20}.$$

Minden ismeretlen adat kiesett, ez elsőfokú egyenlet β számára. A megoldás: $\beta=0{,}963\cdot10^{-3}$ 1/°C.

A II. forduló feladatai

1. *r sugarú, m tömegű abroncsot függőleges síkban, a talaj fölött, középpontja körül ω_0 szögsebességgel „visszafelé" megforgatva úgy dobunk el, hogy középpontjának sebessége az eldobás irányában v_0. Mekkora ω_0-val érhető el, hogy az abroncs talajtérés utáni mozgása során visszaforduljon (visszafelé haladjon)? Mekkora ω_0 esetén lesz a visszafelé haladó abroncs sebessége v_0?*



3. ábra

Megoldás. Kezdetben, a felülethez való hozzáérés előtt az abroncs középpontjának vízszintes sebessége v_0, jobbra számítva pozitív előjellel (3. ábra) és az abroncs forgásának szögsebessége ω_0, pozitívnak számítva, ha iránya egyezik az óramutató járásával; a kerületi pont sebessége a középponthoz viszonyítva $\omega_0 r$. v_0 és ω_0 egymástól függetlenül, tetszés szerint megadható adatok.

Először legyenek olyanok a kezdeti adatok, hogy $\omega_0 r < v_0$. A felülethez való hozzáérés pillanatától kezdve a felület mentén nagyobb a középpont jobbra tartó sebessége, mint a lent érintkező kerületi pont középponthoz viszonyított balra irányuló sebessége, ezért nincs sima legördülés, a kerék köszörül. A kerületi pont mentén fellépő súrlódási erő μmg és balra mutat. Hozzáveszünk a középpontban $\pm\mu mg$ erőket. $-\mu mg$ erő lassítja a középpont mozgását, a lassító gyorsulás μg. Ennek hatása alatt a középpont egyenletesen lassuló mozgást végez, amelynél $v_c = v_0 - \mu gt$. A $+\mu mg$ erő és az eredeti μmg súrlódási erő μmgr forgatónyomatékot jelent, amely gyorsítja a középpont körüli forgást. A forgás szöggyorsulása $\beta =$ forg. nyom.: tehetetl. ny. $= \mu mgr/mr^2 = \mu g/r$. Tehát a szögsebesség mint az idő függvénye: $\omega = \omega_0 + \mu gt/r$. Ha a kerületi pontnak a középponthoz viszonyított sebességét kérdezzük, ez $v_k = \omega r = \omega_1 r + \mu gt$. Ezek szerint a középpont μg gyorsulással lassabbodva, a kerületi pont μg gyorsulással gyorsabbodva mozog. A forgó mozgás fékezi a haladást, a haladó mozgás gyorsítja a forgó mozgást. Ez a folyamat addig tart, amíg v_c és v_k egyenlővé nem lesz. Ekkor ér véget a mozgás változása, innentől kezdve sima legördülés áll be, a középpont sebessége valamilyen v_r érték, és a szögsebesség $\omega_r = v_r/r$. Tegyük egyenlővé v_c-t és v_k-t:

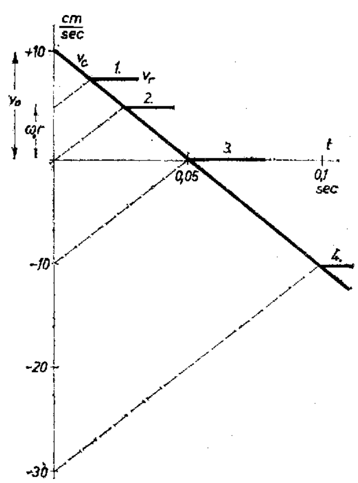
$$v_0 - \mu gt = \omega_0 r + \mu gt.$$

Innen a lassítás időtartama $t = \dfrac{v_0 - \omega_0 r}{2\mu g}$.

Ezt az időt akár v_c, akár v_k képletébe helyettesítve megkapjuk a középpont végső sebességét, amellyel a lassítási folyamat végén továbbgurul:

$$v_r = \frac{v_0 + \omega_0 r}{2}. \tag{1}$$

Látható, hogy ez a végsebesség a középpont és kerületi pont kezdeti sebességének a számtani középértéke. μ, a súrlódási együttható számértéke e tekintetben lényegtelen.



4. ábra

4. ábránk grafikusan mutatja meg a középpont mozgásának fékeződését és a forgás felgyorsulását, ha $v_0 = 10$ cm/s, $r = 5$ cm, $\mu = 0{,}2$, $g = 1000$ cm/s^2. A középpont v_c sebességének grafikonja $+10$-ből kiinduló, süllyedő egyenes (vastag vonal). Az 1. szaggatott vonal a forgás kerületi sebességének a növekedését mutatja, ha kezdetben $\omega_0 = 1$, $\omega_0 r = 5$ cm/s; a végső sebesség közösen 7,5 cm/s lesz. Ha forgás nélkül dobjuk oda az abroncsot $\omega_0 r = 0$ (2. vonal), akkor a végsebesség 5 cm/s. Ha ellentétes forgásiránnyal, $\omega_0 r = -10$ cm/s-mal dobjuk oda az abroncsot, akkor a végsebesség nulla, az abroncs állva marad (3. vonal); ez a felelet a feladat első kérdésére. Ennél gyorsabb ellentétes kezdeti forgásnál a középértékként keletkező végső sebesség negatív, vagyis az abroncs visszafelé gurul, például $\omega_0 r = -30$ cm/s-nál a végső sebesség -10 cm/s (4. vonal); ez a válasz a feladat második kérdésére.

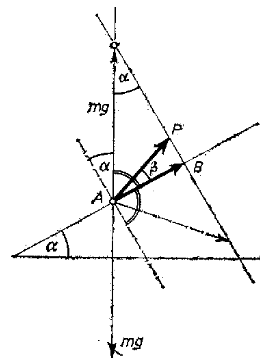
(1) képletünkből, a kezdeti v_0-ból és ω_0-ból kiszámítható a végső sebesség. (1) megoldása ω_0-ra:

$$\omega_0 = \frac{2v_r - v_0}{r}.$$

A feladat első kérdésében a határesetben $v_r = 0$, ezért $\omega_0 = -v_0/r$. Ennél nagyobb abszolút értékű, visszafelé forgó kezdeti szögsebesség szükséges ahhoz, hogy az abroncs megállás után elindulhasson visszafelé. A második kérdésben $v_r = -v_0$, tehát $\omega_0 = -3v_0/r$.

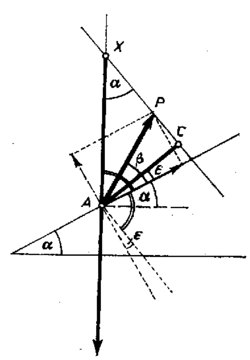
Ha a kezdeti feltétel olyan, hogy $\omega_0 r > v_0$, akkor a forgás gyorsítja fel a középpont haladását és a középpont haladási sebessége fékezi a forgást. A végsebességre most is (1) érvényes. Ha $\omega_0 r = v_0$, akkor semmi sem történik, az abroncs mozgásának megváltozása nélkül gurul tovább a felületen.

2. *α hajlásszögű lejtőn a lejtő síkjával β szöget bezáró erővel, egyenletes mozgással húzunk fel egy testet. A test és a lejtő között a súrlódási együttható μ. Milyen határok között változhat a β szög, hogy a testet fel lehessen húzni a lejtőn?*



5. ábra

Megoldás. Először tekintsük a súrlódás nélküli lejtőt (5. ábra). Az A pontban levő testnek a lejtőn egyensúlyban tartásához valamilyen P erő kell, amelynek nagysága abból következik, hogy lejtő menti vetületének $mg\sin\alpha$-nak kell lennie, $AB = mg\sin\alpha$. Ha P erő a lejtőhöz képest β szöget zár be, akkor is AB-nek kell lennie a lejtő menti vetületének. Ebből azonnal következik, hogy az mg súly felhúzásához alkalmas erők végpontjainak mértani helye B-ben a lejtőre húzott merőleges. Ez a mértani hely az A-ban emelt függőlegest X-ben metszi és azonnal látszik, hogy $AX = AB/\sin\alpha = mg$. Ennél balrább nem kerülhet a P erő végpontja, mert akkor leemelné a tárgyat a lejtőről. Eszerint a súrlódás nélküli esetben β szög számára lehetséges a pozitív irányban $0°$-tól $90° - \alpha$-ig, negatív irányban a 0-tól $-90°$-ig terjedő szögtartomány.



6. ábra

Most lássuk a súrlódásos esetet (6. ábra). P erő lejtőre merőleges összetevője $P\sin\beta$, ezért a tárgyat $mg\cos\alpha - P\sin\beta$ erő nyomja a lejtőhöz és így a súrlódási erő $\mu(mg\cos\alpha - P\sin\beta$. P erő $P\cos\beta$ lejtő menti összetevőjének az $mg\sin\alpha$ súlyösszetevőt és a súrlódási erőt kell egyensúlyoznia, ha a terhet egyenletesen fel akarjuk húzni:

$$P\cos\beta = mg\sin\alpha + \mu(mg\cos\alpha - P\sin\beta).$$

Ebből kiszámítva az egyensúlyhoz szükséges erőt:

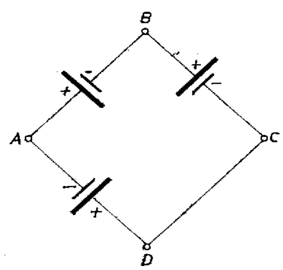
$$P = mg\cdot\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta}.$$

Szépen alakítható át ez az eredmény, ha figyelembe vesszük, hogy ε súrlódási határszög tangense a súrlódási együttható: $\mu = \operatorname{tg}\varepsilon$. Ezt behelyettesítve és a törtet $\cos\varepsilon$-nal bővítve, goniometriai azonosságokkal átalakítva:

$$P = mg\cdot\frac{\sin(\alpha+\varepsilon)}{\cos(\beta-\varepsilon)}. \tag{2}$$

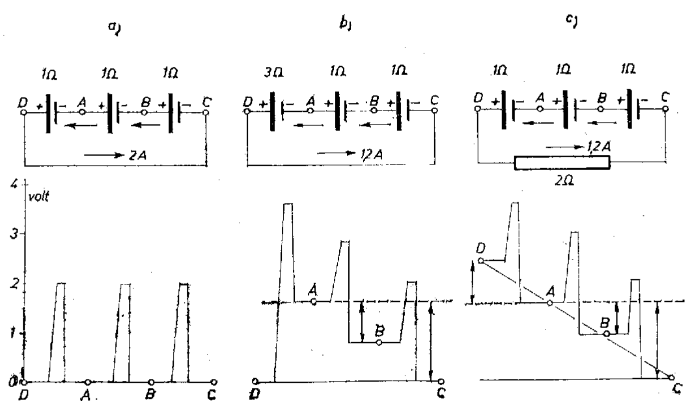
Keressük ismét az egyensúlyozáshoz alkalmas P erők végpontjainak mértani helyét. P erő akkor a legkisebb, ha nevezője a legnagyobb, vagyis 1; ez akkor következik be, ha $\beta - \varepsilon = 0$, vagyis $\beta = \varepsilon$. β szög csak a nevezőben szerepel. Tehát akkor van a legkisebb húzóerőre szükség, ha a kötél akkora pozitív szöget alkot a lejtővel, amennyi a súrlódási határszög. Ez az erő a 6. ábrán AC, nagysága $mg\sin(\alpha+\varepsilon)$. (2) képletünk szerint a tetszőleges irányú AP erőt a maximális erőből úgy kapjuk, hogy elosztjuk $\cos(\beta-\varepsilon)$-nal. Ez azt jelenti, hogy $ACX\sphericalangle$ derékszög és a keresett mértani hely az AC-re C-ben emelt merőleges. Ennek ismerete igen megkönnyíti az áttekintést.

Az AX távolságot úgy kapjuk meg, hogy $AC = mg\sin(\alpha+\varepsilon)$ befogót elosztjuk $AXC\sphericalangle$ sinusával. Ez a szög $\alpha+\varepsilon$. Tehát az AX távolság súrlódásos esetben is mg súllyal egyenlő, mint a súrlódás nélküli esetben. Tehát a β szög számára megengedett szögtartomány a pozitív irányban most is $90^\circ-\alpha$-ig terjed, különben P erő leemelné a tárgyat a lejtőről. Negatív irányban β most 0°-tól $90^\circ-\varepsilon$-ig terjedhet. A negatív irányban 90° és $90^\circ-\varepsilon$ közötti szögtartományban hiába alkalmazunk akármilyen nagy erőt; amelynek még volna lejtő irányú összetevője, mert ez az erő annyira odaszorítja a tárgyat a lejtőhöz, hogy a megnövekedett súrlódási erő teszi lehetetlenné a felhúzást. A lejtő önzáró, mint a fába behajtott facsavar vagy a lemezeket összetartó anyáscsavar.



7. ábra

3. *Három* 2 volt *elektromotoros erejű és* 1 ohm *belső ellenállású elemet a 7. ábra szerint kapcsolunk. Mekkora az egyes csúcspontok feszültsége az A ponthoz képest a) az ábra szerinti kapcsolás esetén? b) ha az $A-D$ ágban levő elem belső ellenállása* 3 ohm*ra növekszik? c) ha a $C-D$ ágba* 2 ohm*os ellenállást kapcsolunk? d) ha a B és D pontok közé* 0,5 ohm*os ellenállást kapcsolunk? e) ha a B és D pontokat rövidre zárjuk?*



8. ábra

Megoldás. A galvánelemek tulajdonsága, hogy a rajtuk átmenő áram irányában haladva a lemezek közötti feszültségkülönbség annyit ugrik, amennyi az elem elektromotoros ereje, emellett annyit esik, mint az elem belső ellenállásának és az áramerősségnek a szorzata. E két feszültségváltozás algebrai összege mérhető a lemezek között. 8. ábránk egy sorban egymás mellé rajzolva mutatja az elemeket. a) esetben az összes elektromotoros erő $3\cdot 2 = 6$ volt, az összes ellenállás $3\cdot 1 = 3$ ohm, tehát az áramerősség $6:3 = 2$ amper. Induljunk el C-ből. Az első elem 2 volttal emelné a feszültségkülönbséget elektromotoros ereje folytán, de belső ellenállásán $2\cdot 1 = 2$ voltot esik is, tehát a lemezek között nem észlelünk feszültségkülönbséget. Ugyanígy van ez a másik két elemnél is. A, B, C, D pontok egyező feszültségen vannak, bármely két pont között mérve a feszültségkülönbség 0.

b) esetben az összes elektromotoros erő $3\cdot 2 = 6$ volt, az összes ellenállás $3+1+1 = 5$ ohm, tehát az áramerősség $6:5 = 1{,}2$ amper. C-ből B-be haladva az emelkedés 2 volt, a süllyedés $1\cdot 1{,}2 = 1{,}2$ volt, tehát B 0,8 volttal pozitívabb, mint C. Pontosan ez történik B-ből A-ba haladva. A-tól D felé haladva az emelkedés 2 volt, az esés $3\cdot 1{,}2 = 3{,}6$ volt, végeredményben D pont 1,6 volttal negatívabb, mint A. A feladat szerint a feszültségeket A ponthoz kell viszonyítani, tehát B 0,8 volttal, C és D 1,6 volttal negatívabb, mint A.

A c) kérdésben ugyanazok az elemek szerepelnek, mint a)-ban, de a telep nincs rövidre zárva, hanem véges ellenálláson van. Az összes elektromotoros erő most is 6 volt, az összes ellenállás $3\cdot 1+2 = 5$ ohm és az áramerősség ismét $6:5 = 1{,}2$ amper. C-től B-ig 2 volt emelkedéshez $1\cdot 1{,}2 = 1{,}2$ volt esés tartozik, tehát B 0,8 volttal pozitívabb, mint C. Ugyanez van B és A, valamint A és D között, D és C között a külső 2 ohmos ellenálláson átfolyó 1,2 amper $2\cdot 1{,}2 = 2{,}4$ voltos feszültségesést jelent, amivel visszaértünk C feszültségéhez. A-hoz viszonyítva D 0,8 volttal pozitívabb, B 0,8 volttal és C 1,6 volttal negatívabb.

A d) és e) kérdésekben feltehetően az a) kérdés összeállításából kell kiindulni. Ebben az esetben B és D között nincs feszültségkülönbség, tehát közéjük bármit kapcsolva ezen nem megy át áram és minden feszültség egyenlő marad, mint a) esetben.