1. Kérdés: *A nyáron felvételiztem az Eötvös Loránd Tudományegyetemen. A következő feladatot kaptam. Egy* 2 kg-*os deszkalapon egy* 1 kg-*os deszkalap fekszik. Legfeljebb mekkora P erővel gyorsíthatom a* 2 kg-*os tömegű deszkát, hogy az* 1 kg-*os ne mozduljon el rajta, ha a nyugalmi súrlódási együttható a két test között, továbbá a súrlódási együttható a deszka és az asztal között* 0,2 *?*

A feladatot nem tudtam megoldani. Majdnem mindenkinek rossz lett a megoldása, kivéve egy fiút, aki „tehetetlenségi erők”-ről beszélt, melyek „mozgó koordinátarendszerekben” fellépnek. Szükségesek-e e fogalmak, vagy a feladat megoldható a középiskolai tananyaggal is?

(Horváth Lajos)

Felelet. Nagy örömmel válaszolok a kérdésre, mivel több év óta felvételiztetek, és sok olyan választ kapok, amelyből kiderül, hogy Newton II. törvénye csupán „$P = ma$”, három betű, amely nagyon keveset mond a diákoknak. A továbbiakban szeretnék rámutatni arra, hogy bizonyos feladatok megoldására a törvényt hogyan célszerű alkalmazni.

Feladatmegoldás szempontjából az $a = P/m$ alakot tudják könnyebben alkalmazni. Ez kimondja, hogy egy anyagi pont gyorsulása egyenlő a rá ható összes erők eredőjének és az anyagi pont tömegének a hányadosával. Arra a kérdésemre, hogy miért van nyugalomban az asztalon levő hamutartó, amikor rá mg nagyságú erő hat, sok érdekes választ kaptam már. Például: a súlyerő nem számít a gyorsító erők közé, a súrlódási erő nem engedi a hamutartót mozogni stb. Mégis az ilyen kérdéseket sok diák meg tudja magyarázni, mondván, hogy a testre ható erők eredőjét kell venni, márpedig a hamutartóra súlyán kívül hat még az asztal által kifejtett ugyanolyan nagyságú, de ellentétes irányú erő is, és így a két erő eredője 0.

Nehezen megy a törvénynek olyan alkalmazása, amikor az a feltétel, hogy egy m tömegű testnek a gyorsulással kell mozognia, és ebből kell az erőt meghatározni. A II. törvény szerint ahhoz, hogy egy m tömegű test a gyorsulással mozogjon, $P = ma$ erőnek kell hatnia.

Vegyük a következő feladatot.

Az asztalon van egy 1 kg-*os test, amely súrlódás nélkül mozoghat. Mekkora erővel kell húznom, hogy* 5 m/sec^2 *vízszintes irányú gyorsulással mozogjon?*

A törvény szerint $P = ma = 1 \text{ kg} \cdot 5 \text{ m/sec}^2 = 5$ Newton vízszintes irányú erővel kell a testre hatni és ezt az erőt valamilyen testnek ki is kell fejtenie. Ha egy olyan cérnaszálat kötök a testre, amely már 2 Newton erő hatására elszakad, akkor ezzel a cérnaszállal csak $a = P/m = 2 \text{ m/sec}^2$ maximális gyorsulással tudom mozgatni a testet. Nagyobb erő esetén elszakad a cérna.

Térjünk most vissza az eredetileg kitűzött feladathoz. A 2 kg-os m_2 tömeget a gyorsulással akarom gyorsítani. Ahhoz, hogy az 1 kg-os m_1 tömegű test ne mozogjon rajta, kell, hogy az is a gyorsulással mozogjon. Ehhez pedig $P_1 = m_1 a$ erőre van szükség. Milyen erő fogja fedezni ezt a gyorsítási erőt? Az m_1 tömegre ható $m_1 g$ súlya és az m_2 deszka által gyakorolt ellenerő eredője 0. Hat azonban m_1 és m_2 között súrlódási erő is. E nyugalmi súrlódási erő maximális nagysága $P_s = \mu P_{ny}$, ahol μ a nyugalmi súrlódási együttható, P_{ny} pedig a felületre merőleges nyomóerő. Tehát feladatunkban maximálisan (g értékét kerekítve) $P_s \approx 0{,}2 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/sec}^2 = 2\ N$ erő léphet fel a két test között. Ha a maximális erő, amely m_1-re hathat, 2 N , akkor a maximális gyorsulás, amellyel mozoghat, $a = P/m = 2\,\text{N}/1 \text{ kg} = 2 \text{ m/sec}^2$.

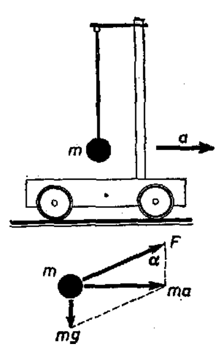
Tehát m_2-t is maximálisan 2 m/sec^2 gyorsulással mozgathatom. A kérdéses P erővel szemben fellép azonban az $(m_1 + m_2)\ g\ \mu_1$ súrlódási erő is, így

$$P - (m_1 + m_2)\ g\ \mu_1 = (m_1 + m_2)a,$$

amiből

$$P = (m_1 + m_2)(a + g\,\mu_1),$$
$$P = 3 \text{ kg} \cdot (2 + 0{,}2 \cdot 10) \text{ m/sec}^2 = 12 \text{ N}.$$

Elemezzük még a következő feladatot.



Az ábrán látható kiskocsi vízszintes irányban a gyorsulással mozog. Milyen irányban áll a kiskocsin levő m tömegű testet tartó fonal?

Ahhoz, hogy a kiskocsin levő m tömegű test a kiskocsival együtt vízszintes irányban a gyorsulással mozogjon, kell, hogy ugyanilyen irányú $P = ma$ erő legyen az m tömegre ható erők eredője. Az m tömegre csak a súlya, mg és a fonál F feszítőereje hat. Kell tehát, hogy ma e két erő eredője legyen. Az erők vektoriális összeadásából nyerjük, hogy $F = \sqrt{(mg)^2 + (ma)^2}$. Az erőnek a függőlegessel bezárt α szögére igaz: $\operatorname{tg} \alpha = ma/mg$, azaz $\operatorname{tg} \alpha = a/g$.

Az F erőt a fonál szolgáltatja, így a fonálnak is ebben az irányban kell állnia. Látható, hogy ha $a = 0$, tehát a kiskocsi áll vagy egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, akkor a fonál függőlegesen lóg, mivel $\alpha = 0$.

E két feladatban tehát nincs szükség „tehetetlenségi erők” vagy „mozgó koordinátarendszerek” bevezetésére. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy ezek segítségével sok esetben könnyebbé válik a feladat megoldása, de minden feladat megoldható nélkülük is.

1. $30°$-os lejtőn 2 $\mathrm{m/sec^2}$ gyorsulással felfelé gyorsul egy kiskocsi. Mekkora és milyen irányú erővel kell tartani a kiskocsin levő 1 kg-os tömeget, hogy a kiskocsival együtt mozogjon, ha a tömeg és a kocsi között nincs súrlódás?

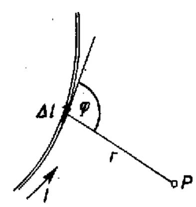
2. Mekkora erő feszíti azt a kötelet, mellyel 10 kg tömegű vödröt 3 $\mathrm{m/sec^2}$ gyorsulással függőlegesen felfelé gyorsítunk, ha a kötél tömegét elhanyagoljuk?

Poór István

2. Kérdés. *Feladatokban gyakran számítjuk vezetők mágneses terét. Mit kell tudnunk Biot és Savart erre vonatkozó törvényéről?*

(Kislaki Zoltán)

Felelet. *Oersted* dán fizikus észlelte először 1820-ban, hogy vékony platinadróton átfutó áram kitériti a mágnestűt. Még ugyanebben az évben *Ampére* állapította meg azt a törvényszerűséget, amely kapcsolatba hozza a mágnestű kitérését az áram irányával. Az áram erőssége és a mágneses térerősség közötti összefüggésre ugyanebben az időben talált rá a két francia fizikus, *Biot* és *Savart.* Törvényüket a ma használatos formában *Laplace* írta fel először.



1. ábra

A Biot–Savart törvény elsősorban igen vékony vezetőkre vonatkozik, amelyekben állandó (I) erősségű (stacionárius) áram folyik. Azt mondja ki, hogy ha a vezetőnek egy igen kicsi (egyenesdarabnak tekinthető) Δl szakaszát tekintjük, akkor az I áram által keltett mágneses térerősség nagysága a P pontban

$$\Delta H = \frac{1}{4\pi} \quad \frac{I \cdot \Delta l \cdot \sin\varphi}{r^2},$$

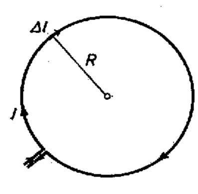
ahol r az elemi vezetőhossz távolsága a P-től, φ pedig a szög, amelyet az áram iránya r-rel zár be. A tér irányát az ismert jobbkéz-szabály adja meg és a tér-erősség értékét A/m-ben kapjuk, ha az áramerősséget amperben, a távolságot méterben adjuk meg.

Első látásra feltűnik a hasonlóság a Newton-féle gravitációs törvénnyel, vagy a Coulomb-féle törvényekkel. Jellegzetesen távolhatási törvény, mint ezek, szemben az elektromágneses térre vonatkozó Maxwell-féle törvényekkel, vagy a gravitáció esetén az általános relativitáselmélettel. De amint az utóbbi tartalmazza a Newton-féle törvényt, vagy a Maxwell-elmélet a Coulomb-törvényt, ugyanúgy a Maxwell-féle térelméletből bizonyos feltételek mellett kiadódik a Biot–Savart törvény is.

Jelentősége annyiban nagy, hogy segítségével bármilyen alakú vékony vezetőben folyó áram mágneses térerőssége meghatározható. Az egyes áramelemek által keltett térerősségeket kell vektorilag összegezni a paralelogramma-tétel szerint. Természetesen ez csak igen egyszerű vezetők esetén lehetséges így. Integrálszámítás segítségével azonban elvileg minden vezetőre elvégezhető a számítás.

Nézzünk néhány egyszerű példát, ahol a számítás nem ütközik nehézségbe.

1. *Kör alakú vezetőben folyó állandó erősségű áram mágneses tere a kör középpontjában.*



2. ábra

Az elemi hosszúságú áramdarab mágneses térerőssége:

$$\Delta H = \frac{1}{2\pi} \frac{I \cdot \Delta l}{R^2},$$

mivel $\varphi = 90°$. A tér nyilván merőleges a rajz síkjára és befelé mutat. Mivel a kör mentén minden Δl hosszra ugyanaz a térerősség nagyság és irány szerint, azért az eredő

$$H = \frac{I}{4\pi R^2}\sum \Delta l.$$

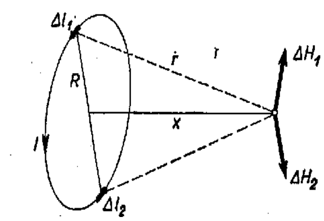
De

$$\sum \Delta l = 2R\pi, \quad \text{s így} \quad H = \frac{I}{2R}.$$

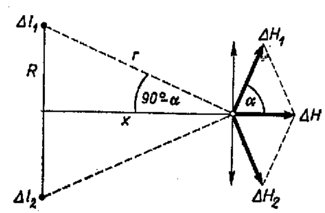
Ha nem egy menet fut, hanem N egymás mellett oly szorosan, hogy vékony csövet képeznek, akkor

$$H = \frac{IN}{2R}.$$

2. *Hasonlóképpen elvégezhető a számítás a körvezető síkjára merőleges, a középpontra állított egyenes mentén x távolságra.*



3. ábra



4. ábra

A kör kerületének Δl_1 szakaszára fennáll:

$$\Delta H_1 = \frac{I}{4\pi}\cdot\frac{\Delta l_1}{r^2} = \frac{I\cdot\Delta l_1}{4\pi(R^2+x^2)},$$

mert $\varphi = 90°$. A tér iránya pedig merőleges r-re és a rajzban felfelé mutat. Vegyük most az ugyanazon átmérő másik végén fekvő Δl_2 szakaszt. A térerősség nagysága megegyezik az előbbiével, de iránya lefelé mutat, vagyis a két vektor x-re merőleges komponensei kiegyenlítik egymást, míg az x irányába esők összeadódnak.

A két elemi áramszakasz által keltett térerősség tehát

$$\Delta H' = 2\cdot\Delta H_1\cos\alpha = \frac{I}{2\pi}\cdot\frac{\Delta l_1}{R^2+x^2}\cos\alpha.$$

De $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha) = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$,
s így

$$\Delta H' = \frac{IR}{2\pi}\,\frac{\Delta l_1}{(R^2+x^2)^{3/2}}.$$

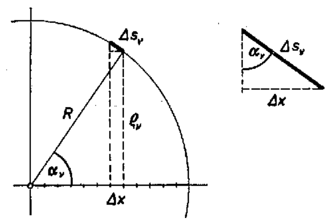
Ha most a Δl_1-eket összegezzük a félkörre és a vesszős jelölést elhagyjuk, nyerjük:

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{I\cdot R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}}.$$

Ezt a képletet kell használni a szolenoid mágneses terének kiszámításához, amely azonban csak az integrálszámítás alkalmazásával végezhető el.

3. Felsőbb analízis nélkül eredményt lehet elérni *az* **570**. *feladat esetén is.* A számítás menete a következő.

Először csak a félgömbre tekercselt N menet esetében végezzük el. Tekintsük a menetek síkjára merőleges főkörmetszetet, amely R sugarú félkör. Osszuk fel az R-et n számú (kicsiny) Δx hosszúságú egyenlő részre. A ν-edik szakaszhoz tartozzék a ΔS hosszúságú egyenesnek vehető körív.



5. ábra

Mivel a negyedkörön egységnyi távolságra

$$\frac{N}{R\pi/2} = \frac{2N}{R\pi}$$

menet esik, a ΔS_ν-n $\dfrac{2N}{R\pi}\Delta S_\nu$ menet található. De nyilván

$$\Delta S_\nu \approx \frac{\Delta x}{\sin\alpha_\nu} = \frac{R}{\varrho_\nu}\Delta x$$

(ekkor *relative* kis hibát követünk el, ha n elég nagy) s így a $\Delta x = \dfrac{R}{n}$ vastagságú gömbrétegben a menetek száma $\dfrac{2N}{\pi}\cdot\dfrac{x}{\varrho_\nu}$. Ezért az ezek által keltett térerősség a középpontban közelítőleg

$$\Delta H_\nu \approx \frac{I}{2}\,\frac{\varrho_\nu^2}{[\varrho_\nu^2+(\nu\Delta x^2]^{3/2}}\cdot\frac{2N}{\pi}\,\frac{\Delta x}{\varrho_\nu} = \frac{I\cdot N}{R^3\pi}\,\varrho_\nu\cdot\Delta x,$$

mert

$$\varrho_\nu^2 = R^2-(\nu\Delta x)^2.$$

Tehát

$$H \approx \frac{IN}{R^3\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\varrho_\nu\Delta x.$$

Minthogy azonban $\varrho_\nu\Delta x$ a ϱ_ν magasságú Δx alapú téglalap területe, azért az összegezés ν szerint a Δx alaphosszú téglalapok összterületét adja, amely ha N elég nagy és a nála kisebb n is elég nagy, jól megközelíti a negyedkörlap területét, tehát

$$H \approx \frac{I\cdot N}{4R}.$$

Ez az eredmény egyezik azzal, amelyet az analízis módszere nyújt. Sőt, számításunk menete pontosan fedi az analízis módszerét. Ha az egész gömböt tekercseljük körül, akkor a középpontban nyilván kétszer akkora lesz a térerősség nagysága.

Dózsa Márton