Időről időre felbukkan a matematikai köztudatban a következő érdekes feladat. Egy egyenlő szárú háromszög csúcsszöge 20°. Alapjának egyik végpontjából megrajzoljuk azt az egyenest, ami az alappal 50°-os szöget zár be, a másikból pedig azt, ami az alappal 60°-os szöget zár be. Messék ezek a háromszög szárait az N, M pontokban. Mekkora szöget zár be az MN egyenes az alappal? (1. ábra)

1985-04-147-1.eps

1. ábra

A feladat „kétcsillagos", vagyis az igen nehezek közé tartozik, megoldása ravasz ötleteket kíván, olyan segédpontok felvételét, amik egyáltalán nem „természetesek". Most egy olyan megoldást mutatunk be, ami eltér a szokásos, „sztenderd" megoldástól, és talán a feladat eredetére is rámutat.

Vegyük észre, hogy a megadott szögek mind 10°-nak egész számú többszörösei. S van olyan sokszög, aminek csúcsai az összes olyan háromszöget kifeszítik, aminek minden szöge 10° többszöröse: a szabályos 18-szög. A sokszög szögei 160°-osak, s bármely oldalnak a többi csúcsból vett látószöge pontosan 10°. Így egy csúcsból induló két átló szöge annyiszor 10°, ahány sokszögoldal esik az átlók második végpontjai közé; két metsző átló szögét pedig a 2. ábrán látható módon határozhatjuk meg – ez is mindig 10° egész számú többszöröse.

1985-04-147-2.eps

2. ábra

A szabályos 18-szög minden hatodik csúcsát összekötve szabályos háromszöget, minden harmadik csúcsát összekötve szabályos hatszöget kapunk. A sokszöget megszerkeszteni persze nem lehet, ezzel ugyanis a 60°-os szöget harmadolni tudnánk, ami nem megy. Szögmérővel (vagy próbálgatással) viszonylag pontosan tudjuk lerajzolni, és az átlók behúzásakor feltűnik, milyen sok olyan metszéspont van, amin harmadik, sőt negyedik átló is áthalad. Persze ha vesszük a szabályos 18-szög egy átmérőjét (leghosszabb átlóját), s egy másik, ezt metsző átlót erre tükrözünk, a tükörkép is ugyanott metszi az átmérőt – ez a három egyenes egy ponton megy át. Így ha a sokszög csúcsait $P_1, P_2, \ldots, P_{18}$ jelöli, középpontját pedig O, akkor a P_1P_{10} átmérőre tükrös helyzetű a P_2P_{15} és a $P_{18}P_5$ átló, valamint a P_3P_{15} és $P_{17}P_5$, így ezek ugyanabban a pontban metszik a P_1P_{10} átlót (3. ábra).

1985-04-148-1.eps

3. ábra

1985-04-148-2.eps

4. ábra

Ugyanezért a P_1P_7, P_2P_{11} és P_3P_{15} átlók is egy ponton mennek át (4. ábra). P_3P_{15} egy O középpontú szabályos háromszög egyik oldala, ezért O-t P_3P_{15}-re tükrözve a szabályos 18-szög P_{18} csúcsát kapjuk. A $P_2OP_{18}\sphericalangle$ a P_2P_{11} és P_9P_{18} átlók szöge, ami a 2. ábra szerinti számolással $(2+2)\cdot 10° = 40°$. A P_2P_{11} átlót P_3P_{15}-re tükrözve a tükörkép átmegy P_{18}-on, persze a P_3P_{15} átlót ugyanott metszi, aholP_2P_{11}, és a tükörkép a P_9P_{18} átlóval 40°-os szöget zár be (5. ábra). De mivel $P_5P_{18}P_9\sphericalangle = 40°$, a tükörkép átmegy P_5-ön is: P_2P_{11}, P_3P_{15} és P_5P_{18} is egy ponton megy át.

1985-04-148-3.eps

5. ábra

Hasonlóan kapjuk, hogy P_5P_{17} is egy szabályos háromszög oldala, O-t erre tükrözve P_2-be megy át, és OP_1 tükörképe P_2P_{13}, tehát P_2P_{13} és OP_1 a P_5P_{17} átlón metszi egymást (6. ábra).

1985-04-148-4.eps

6. ábra

A 3–6. ábrákon három különböző metszéspontról volt szó, a rajtuk átmenő átlókat a 7. ábrán egyszerre feltüntettük.[1]

[1] Az F.1722. feladat megoldásában (44. kötet, 1972, 59. oldal) az összes olyan pontot meghatároztuk, amin a szabályos 18-szögnek legalább négy átlója áthalad.

1985-04-149-1.eps

7. ábra

Vegyük most észre, hogy P_1P_2O olyan egyenlő szárú háromszög, aminek csúcsszöge 20°, továbbá $P_{13}P_2P_1\sphericalangle = 60^\circ$, $P_7P_1P_2\sphericalangle = 50^\circ$. Ezért a megfelelő metszéspontokat M-mel, N-nel jelölve, feladatunk azt meghatározni, hogy az MN egyenes mekkora szöget zár be P_1P_2-vel. De most bizonyítottuk, hogy a P_3P_{15} átló átmegy M-en és N-en is. P_1P_2 és P_3P_{15} szögét pedig könnyen megkaphatjuk: P_1P_2 párhuzamos $P_{18}P_3$-mal, $P_{18}P_3P_{15}\sphericalangle = (18-15)\cdot 10^\circ = 30^\circ$. A keresett szög tehát 30°.

Ugyanez az ábra sok más feladat megoldásában is segíthet. Álljon itt példaként a 2059-es gyakorlat: Egy egyenlő szárú ABC háromszög C-nél levő szöge 100°. Az A-ból induló szögfelező a BC oldalt a D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $AD + DC = AB$.

Jelen esetben az egyenlő szárú háromszög $P_{18}NO$ lesz, hiszen $NOP_{18}\sphericalangle = 40^\circ$, és $NP_{18}O\sphericalangle = P_5P_{18}O\sphericalangle = 40^\circ$, így valóban $P_{18}NO\sphericalangle = 100^\circ$. Ott P_1O lesz az O-ból induló szögfelező, hiszen $P_1OP_{18}\sphericalangle = 20^\circ = 40^\circ/2$. Azt kell belátnunk, hogy NP_{18} és OP_1 metszéspontját D-vel jelölve $OD + DN = OP_{18}$, vagyis a sokszög köré írt kör sugara. Ez viszont azonnal következik abból, hogy P_1DN egyenlő szárú háromszög: $OD+DN = OD+DP_1 = OP_1 = OP_{18}$. A P_1DN háromszög P_1N oldalán fekvő szögeket gyorsan ki tudjuk számítani, $DP_1N\sphericalangle = P_{10}P_1P_7\sphericalangle = 30^\circ$, és $P_1ND\sphericalangle = P_1NP_{18}\sphericalangle = (1+2)\cdot 10^\circ = 30^\circ$. Ezért P_1DN valóban egyenlő szárú, a gyakorlat állítását bizonyítottuk.